Regoli di Genaille per moltiplicare e dividere (1895)

c.bonfanti - 2007

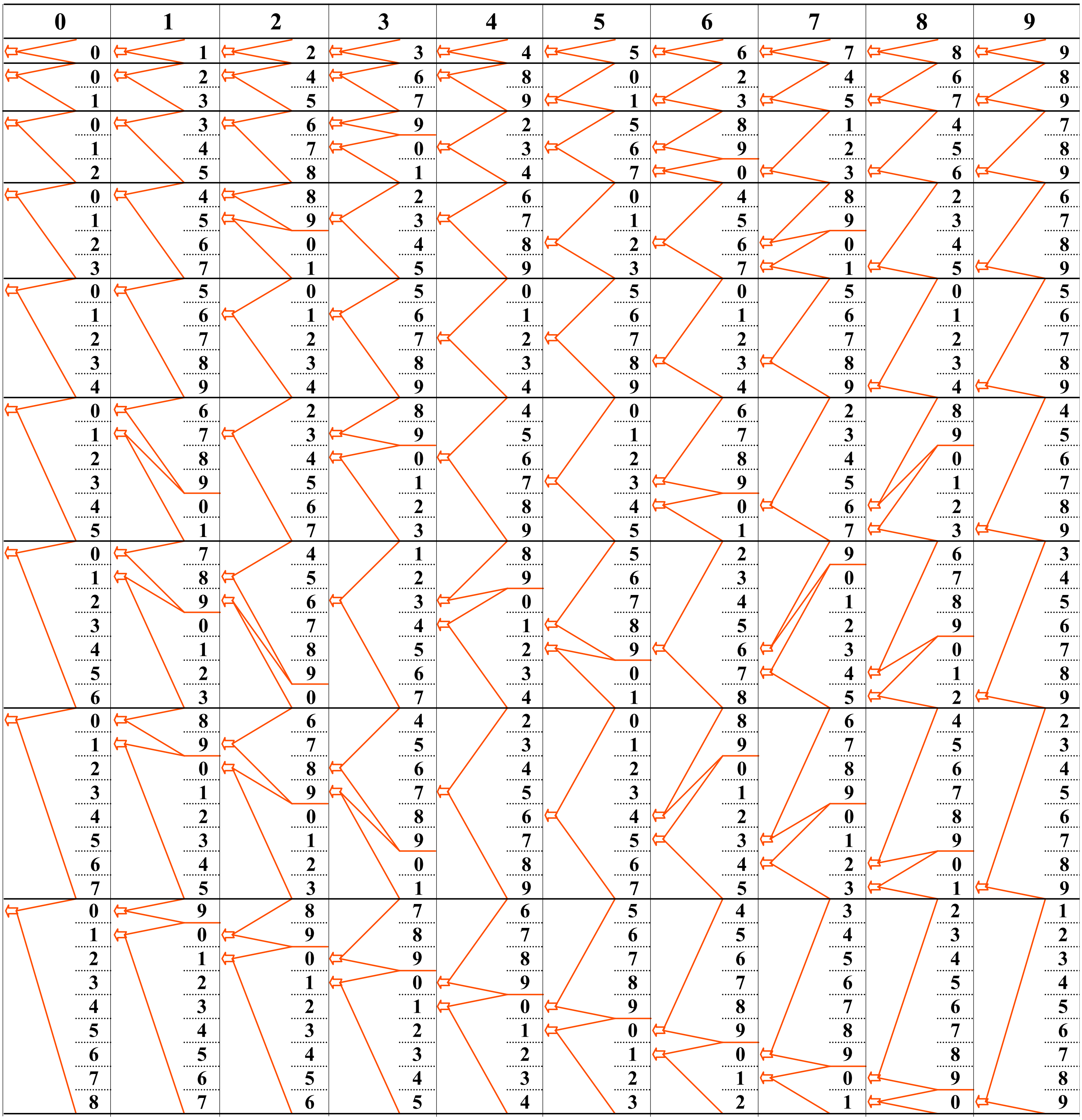
I REGOLI PER MOLTIPLICARE

1 *COME SONO FATTI*

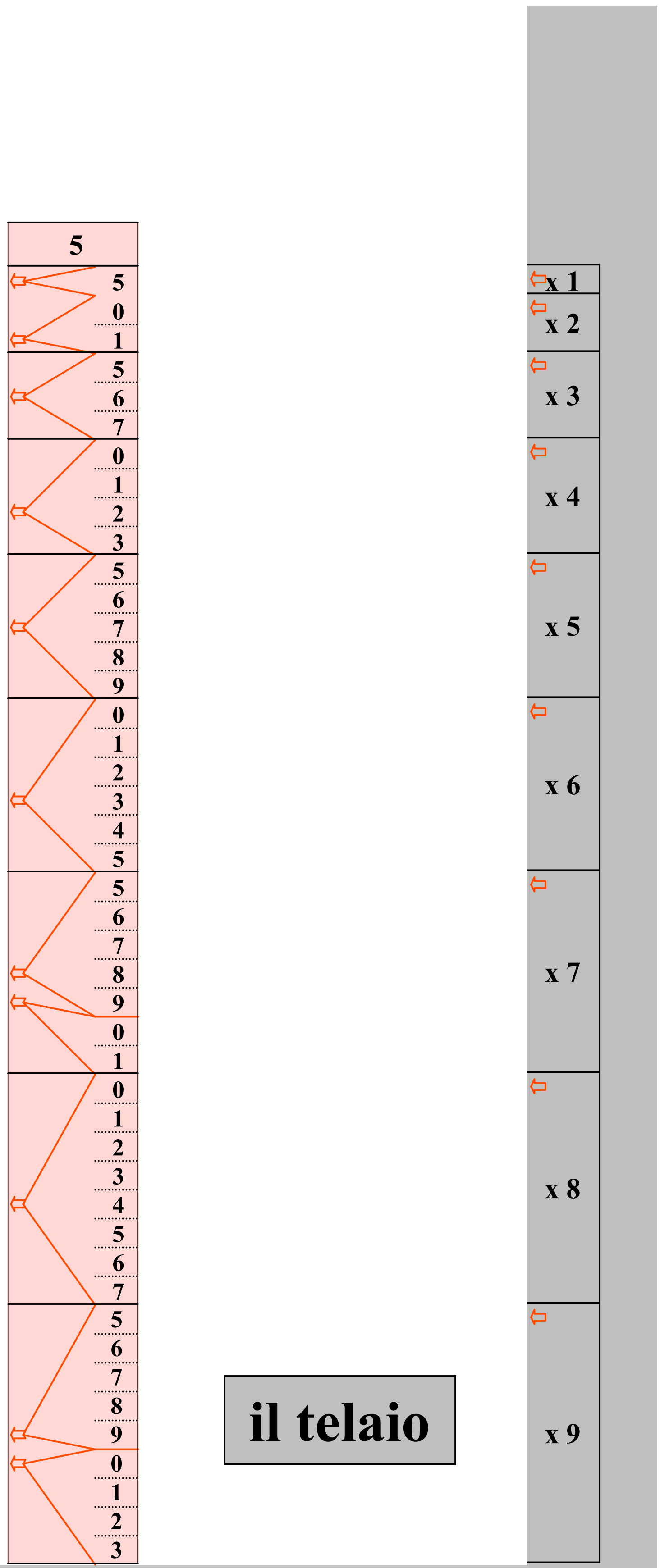
2 *COME FUNZIONANO*

3 *PERCHE' FUNZIONANO*

i dieci tipi di regoli



un regolo



il telaio

regoli di Genaille per moltiplicare - come sono fatti

I REGOLI PER MOLTIPLICARE

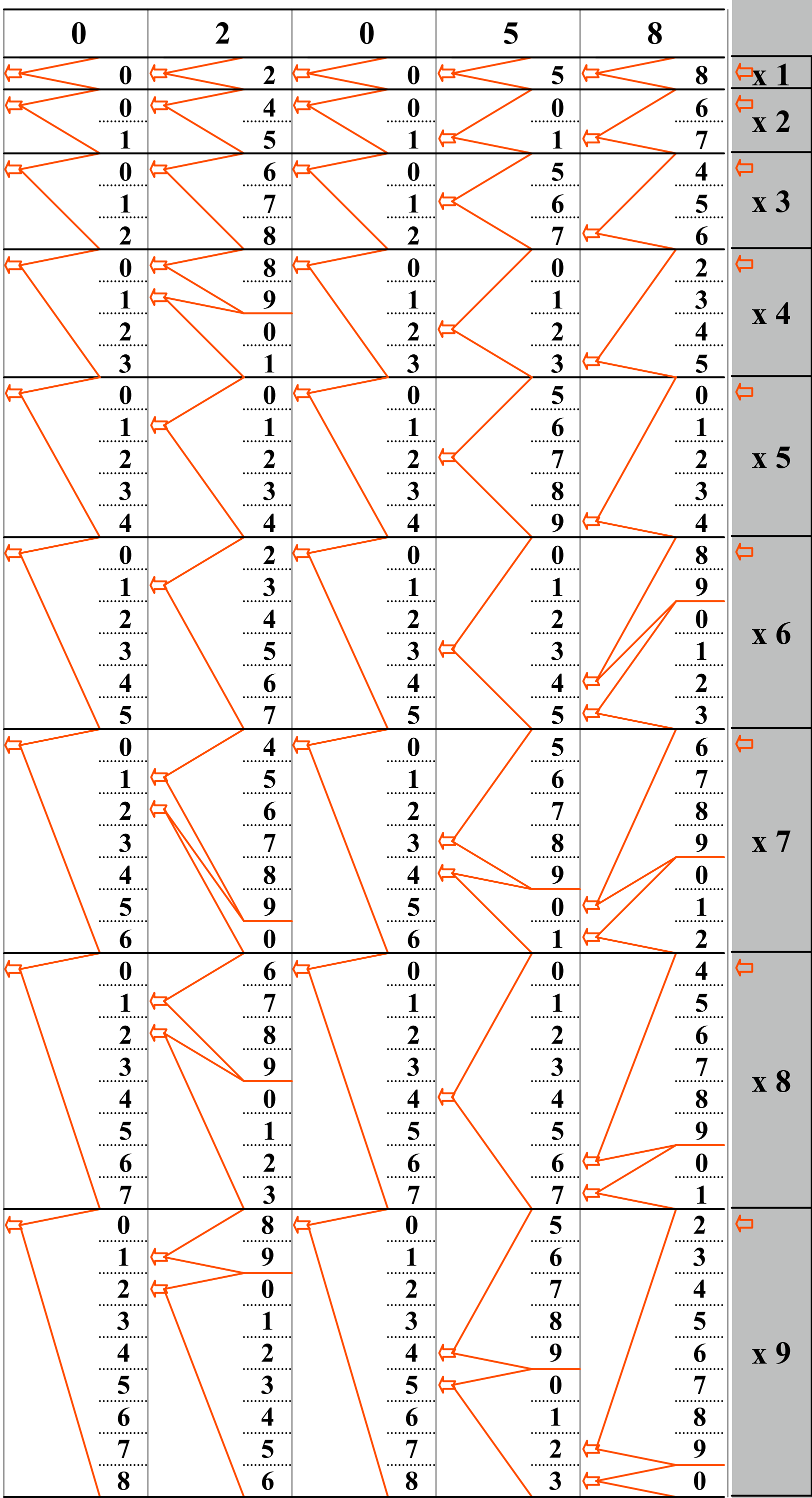
1 ***COME SONO FATTI***

2 ***COME FUNZIONANO***

3 ***PERCHE' FUNZIONANO***

Impariamo con un esempio:

2058 x ...

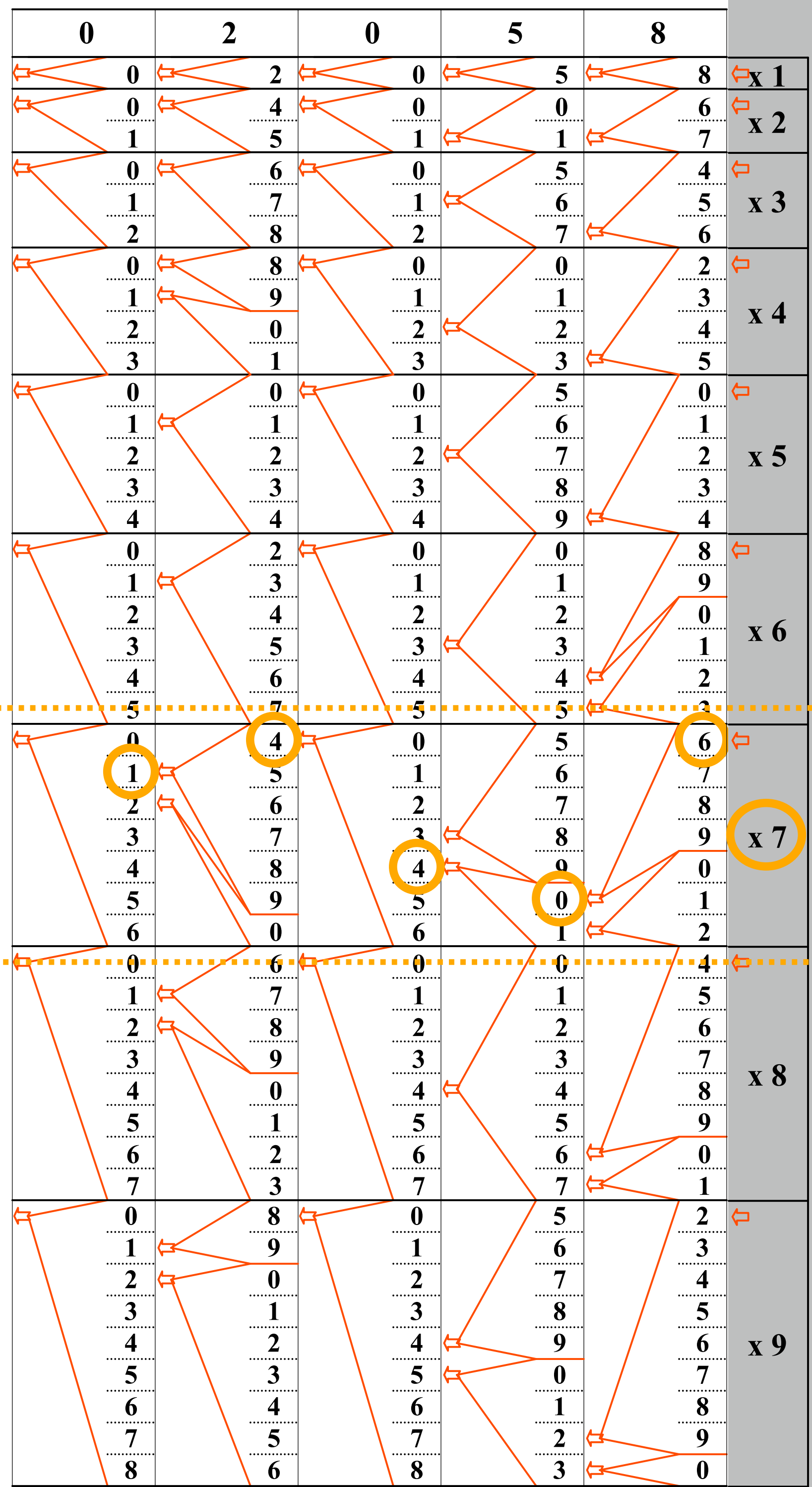


<u>Prima mossa</u>: mettiamo sul telaio i regoli necessari a formare il moltiplicando (2058).

<u>Seconda mossa</u>: aggiungiamo a sinistra un regolo dello zero; vedremo poi a cosa serve.

<u>Mossa finale</u>: guardiamo solo quella striscia orizzontale che è marcata dal 7 sul telaio (moltiplicatore). Adesso basta seguire le frecce rosse e leggere il risultato!

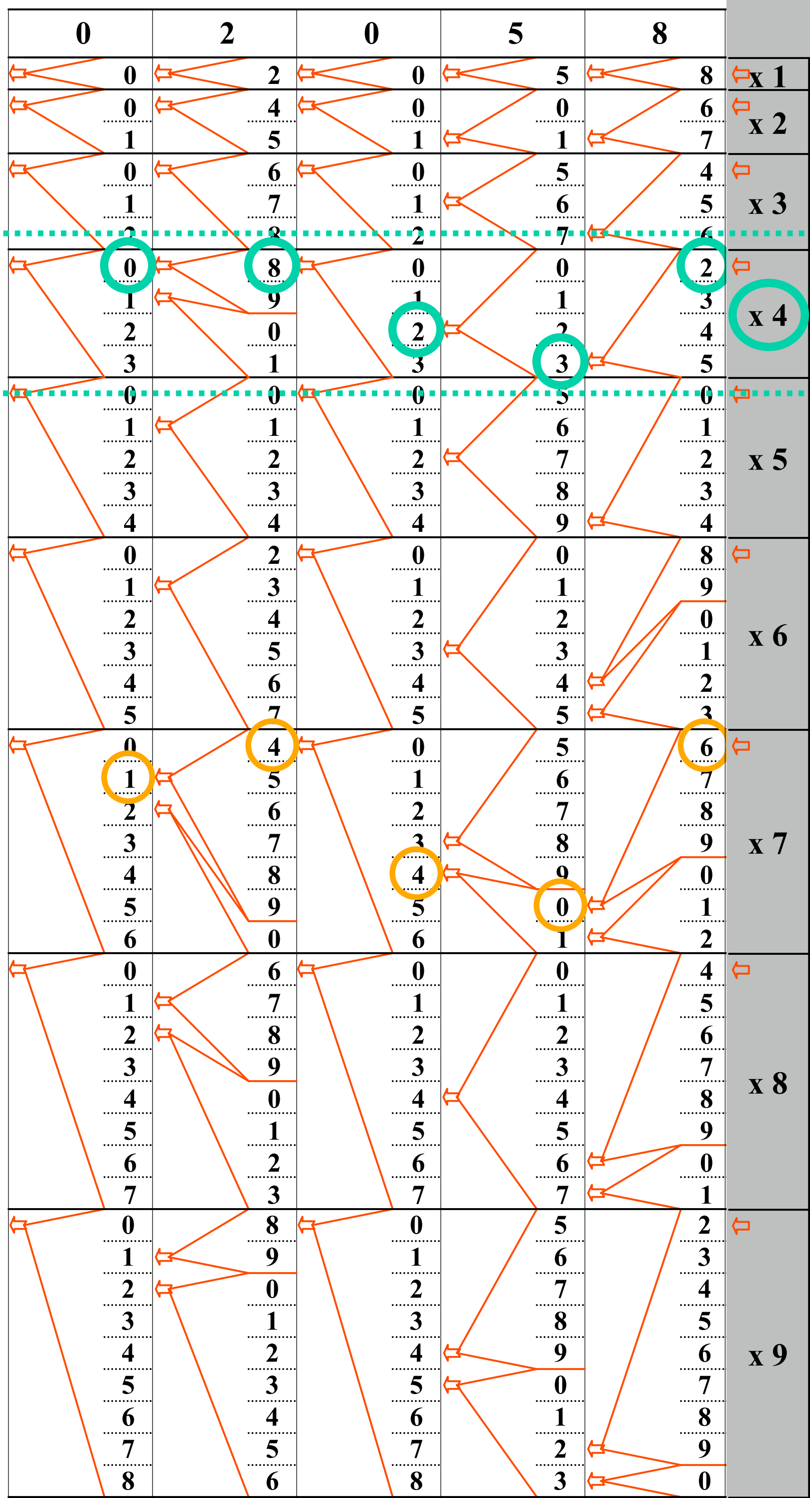
2058 x 7 = 14406



Adesso è chiaro a cosa serve il regolo dello zero che abbiamo aggiunto a sinistra.

Un altro esempio:

$2058 \times 4 = 8232$



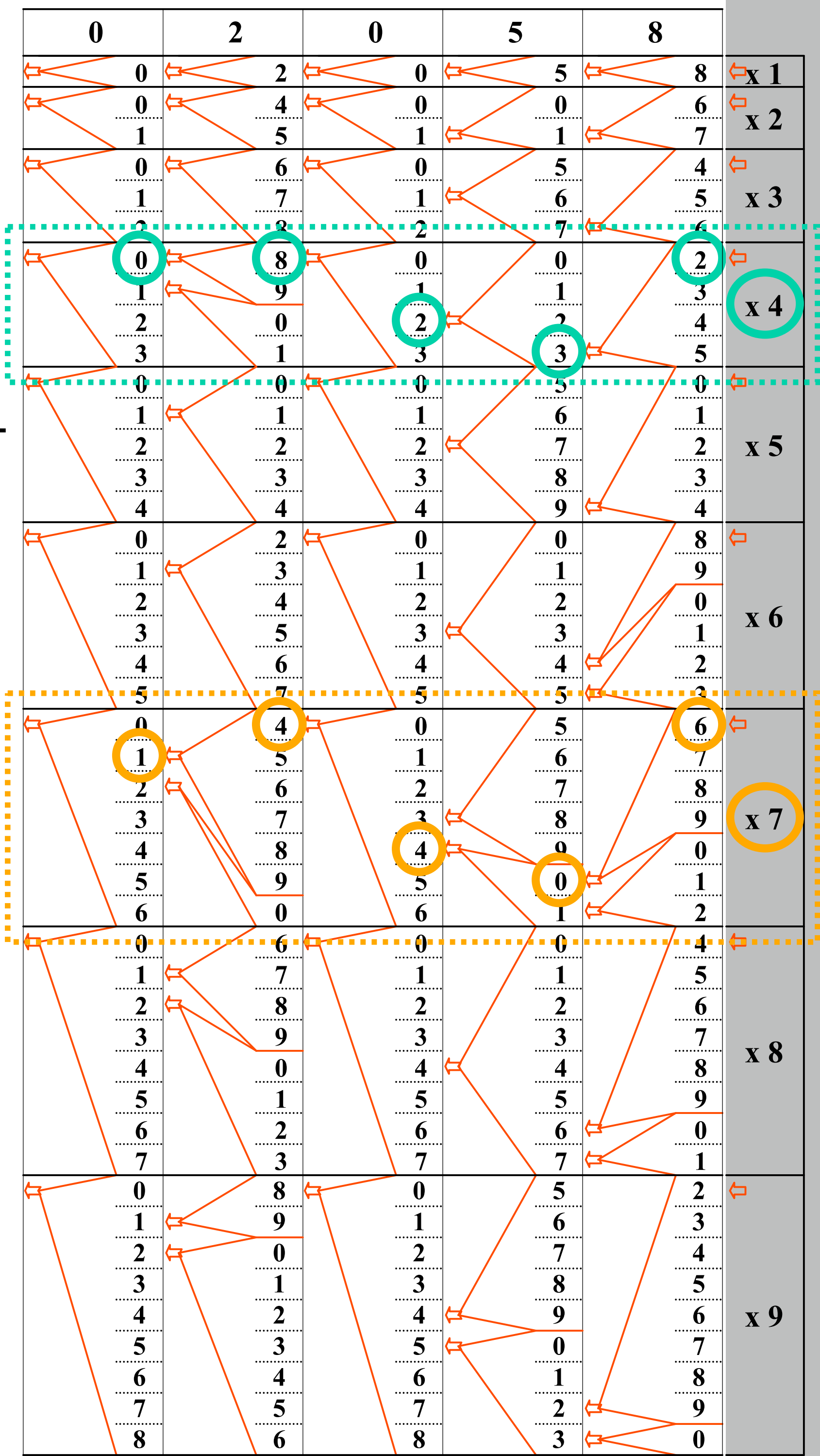
Facciamo le stesse cose di prima, anche se il regolo dello zero, quello aggiunto a sinistra, questa volta non ha dato una cifra significativa.

Sempre più complicato: moltiplicatore con più di una cifra.

2058 x 47 = 14406 +

8232

96726



Basta leggere i prodotti parziali, incolonnarli nel modo giusto e sommarli.

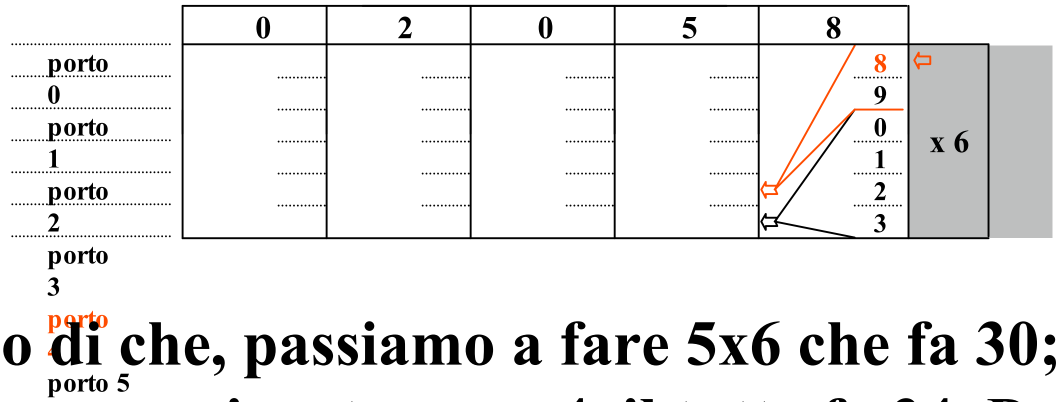
I REGOLI PER MOLTIPLICARE

1 ***COME SONO FATTI***

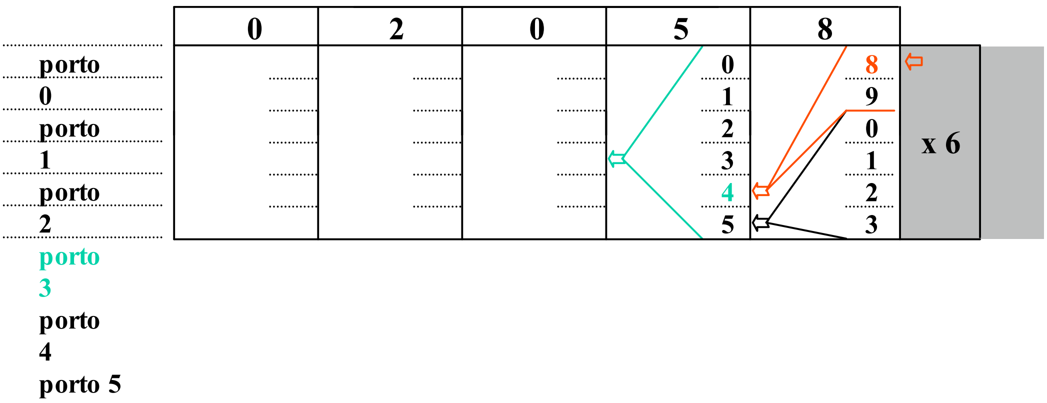
2 ***COME FUNZIONANO***

3 ***PERCHE' FUNZIONANO***

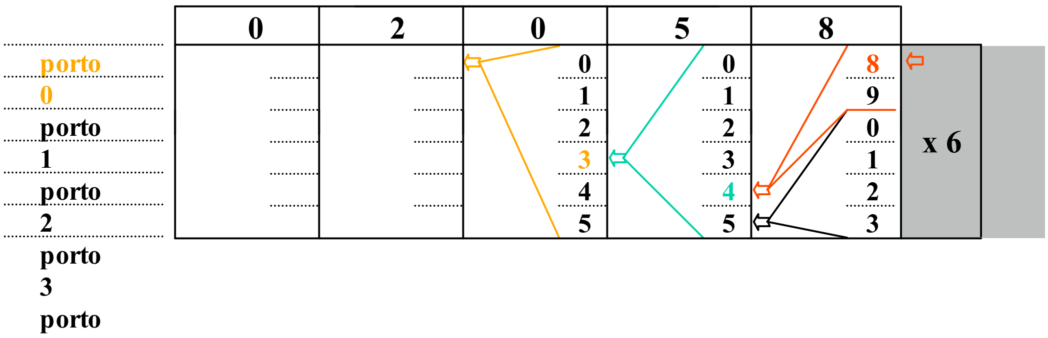
Seguiamo lo stesso esempio di prima e quindi cominciamo da destra: moltiplicare 8 per 6.
Il risultato è 8x6 = 48 ovvero "scrivo 8" e "porto 4".
Notare che il "porto 4" è indicato dalla freccia che ci rimanda alla quinta riga della prossima colonna.



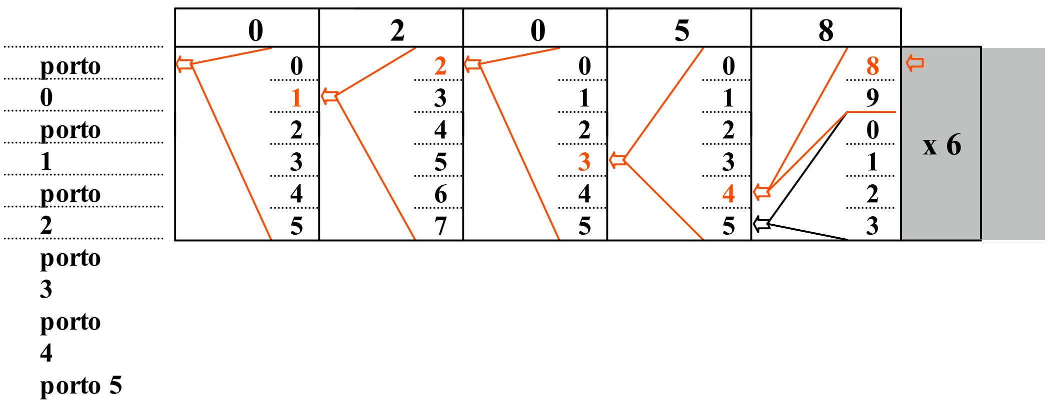
Dopo di che, passiamo a fare 5x6 che fa 30; ma siccome ne riportavamo 4, il tutto fa 34. Però non dobbiamo fare nessun calcolo: basta andare dove ci ha indirizzato la freccia della colonna precedente. Questo significa "scrivo 4" e "porto 3".



Adesso è la volta di 0x6 = 0 e la freccia della colonna precedente ci ricorda che c’era il “porto 3”. Quindi “scrivo 3” e “porto 0”.



Scoperto il trucco, è facile continuare da soli:



OSSERVAZIONE: quando moltiplichiamo per 6, come nell'esempio, non possiamo mai avere un riporto maggiore di 5.
In generale, quando moltiplichiamo per *n*, si ha che

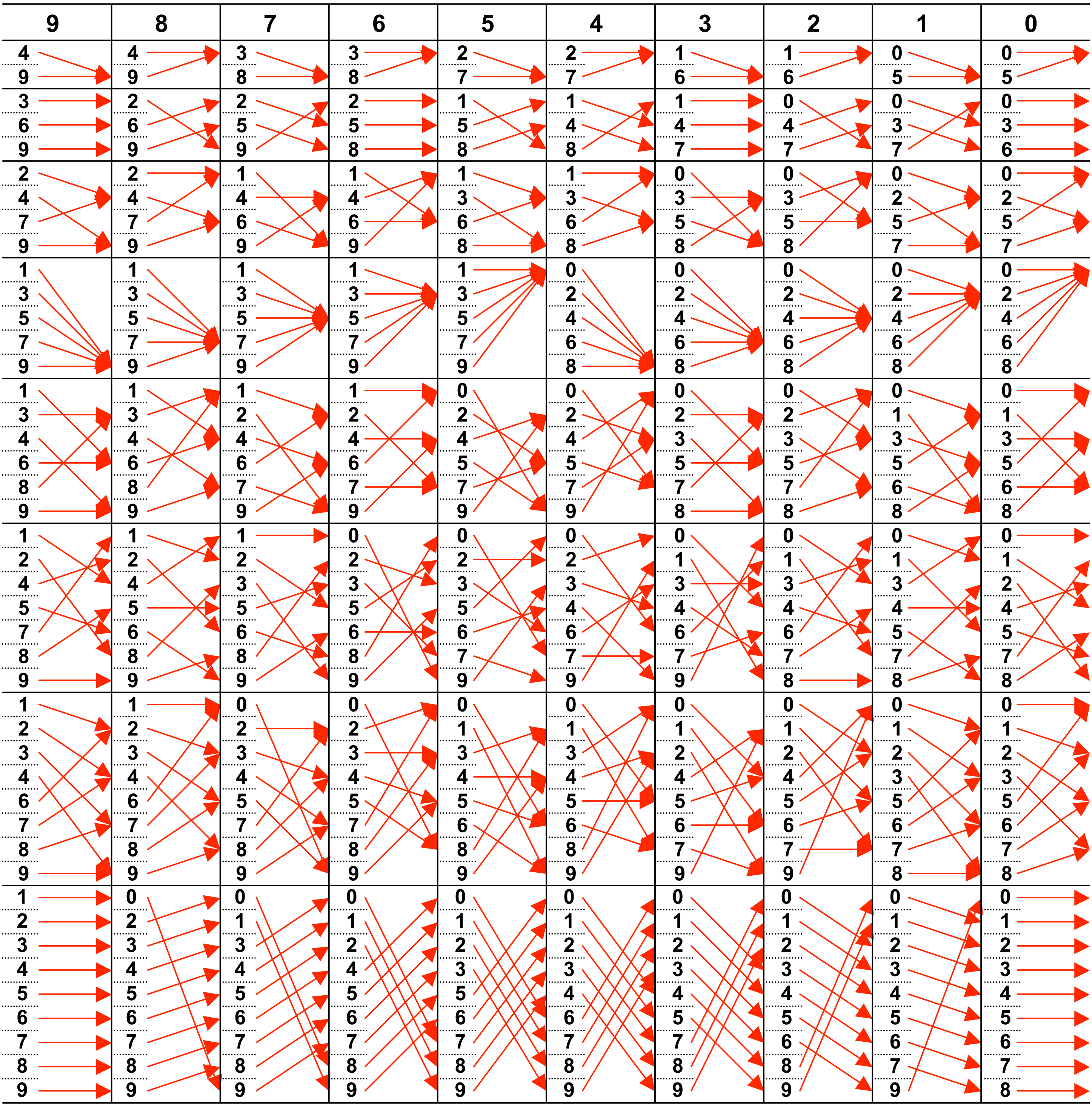
$$0 \leq \text{riporto} \leq n\text{-}1$$

come si vede guardando attentamente a "come sono fatti" i nostri regoli.

ATTENZIONE: se il moltiplicando e/o il moltiplicatore hanno cifre decimali, allora la posizione della virgola nel prodotto bisogna trovarsela da soli.

I REGOLI PER DIVIDERE

I DIECI REGOLI



regoli di Genaille per dividere - come sono fatti

:2

:3

:4

:5

:6

:7

:8

:9

il regolo del resto

il telaio

resto
0 1
0 1 2
0 1 2 3
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5 6
0 1 2 3 4 5 6 7
0 1 2 3 4 5 6 7 8

I REGOLI PER DIVIDERE

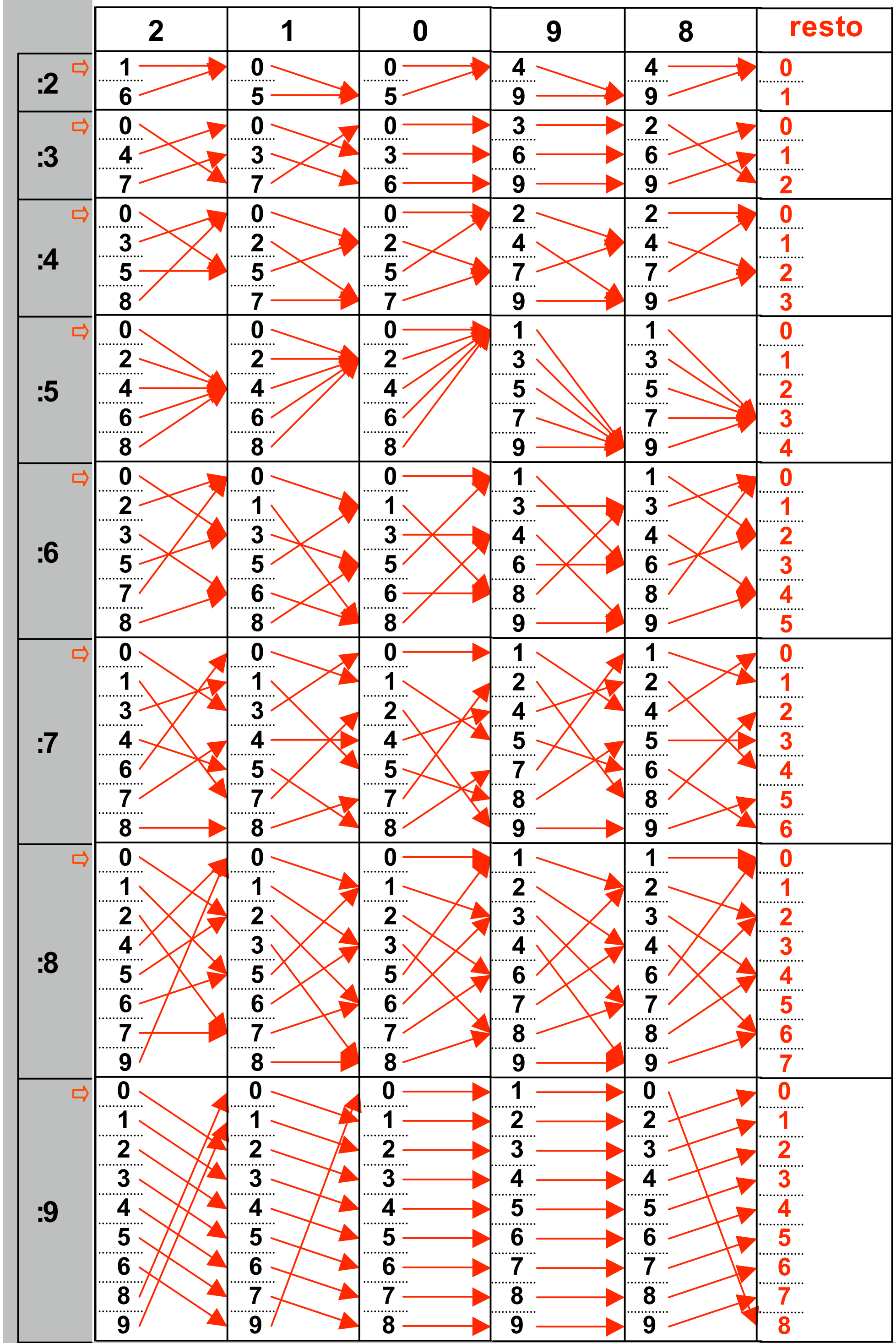
1 ***COME SONO FATTI***

2 ***COME FUNZIONANO***

3 ***PERCHE' FUNZIONANO***

4 ***APPROFONDIMENTI***

Impariamo con un esempio:

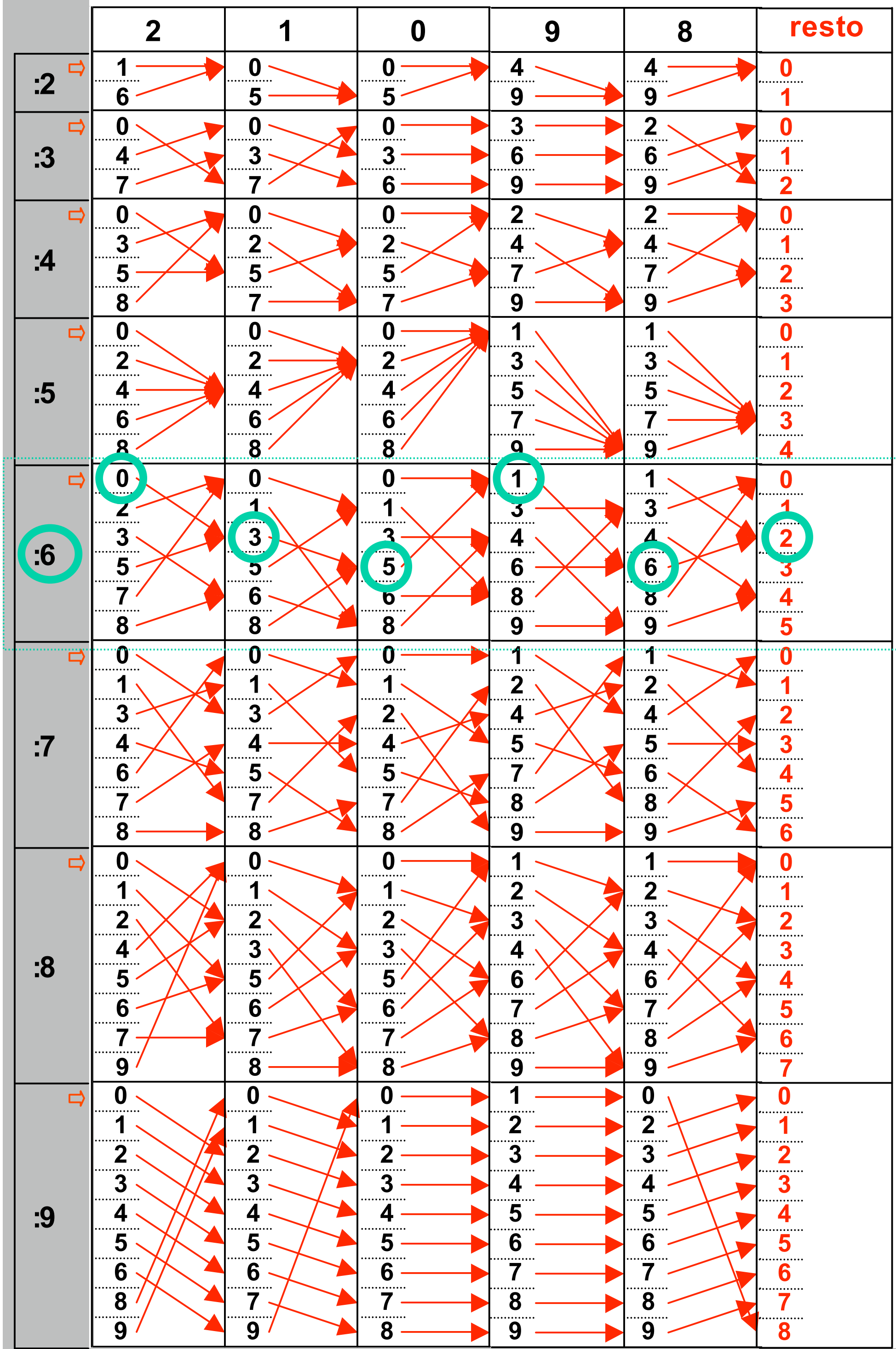


21098 : ……

<u>Prima mossa</u>: mettiamo sul telaio i regoli necessari a formare il dividendo (2058).

<u>Seconda mossa</u>: aggiungiamo a destra il regolo del resto.

<u>Mossa finale</u>: **guardiamo solo quella striscia orizzontale che è marcata dal 6 sul telaio (divisore).**



21098 : 6 = 3516

col resto di 2

Basta seguire le frecce rosse e leggere il risultato!

I REGOLI PER DIVIDERE

La spiegazione del "perché funzionano" è del tutto analoga a quella che abbiamo già vista per la moltiplicazione, solo che nel caso della divisione dobbiamo parlare di *resto* anziché di *riporto*.

Infatti, quando dividiamo per n succede che

$$0 \leq \text{resto} \leq n-1$$

e le frecce rosse puntano al regolo successivo proprio all'altezza del valore del resto.

ATTENZIONE: se il dividendo e/o il divisore hanno cifre decimali, allora la posizione della virgola nel quoziente bisogna trovarsela da soli.

I REGOLI PER DIVIDERE

1 ***COME SONO FATTI***

2 ***COME FUNZIONANO***

3 ***PERCHE' FUNZIONANO***

4 ***APPROFONDIMENTI***

RESTI E PRECISIONE NELLA DIVISIONE.

Consideriamo la divisione 932: 3. I regoli ci dicono che il quoziente è 310 col resto di 2.

Per migliorare la precisione di questo risultato, possiamo mettere in atto il seguente trucco: prolunghiamo il dividendo con degli zeri a destra (sperando di avere regoli "0" in numero sufficiente).

Per esempio trasformiamo 932 in 932000. Questa volta i regoli ci dicono che 932000:3 = 310666 col resto di 2 il che, tenendo conto dei tre zeri che abbiamo astutamente aggiunto, significa in realtà 932:3 = 310,666 col resto di 0,002.
Sorpresa! Il resto è diventato così piccolo da essere trascurabile!

In quest'altro caso siamo ancora più fortunati: 932:8 = 116 col resto di 4 ma, con uno zero aggiuntivo, 9320:8 = 1165 col resto di zero.
Il resto è scomparso e il calcolo 932:8 = 116,5 è quindi del tutto esatto.

Tutto ciò dovrebbe farci ricordare - o stimolarci a scoprire - qualcosa d'interessante riguardo alla rappresentazione decimale (finita o periodica) dei numeri razionali.

PROBLEMA: E SE IL DIVISORE HA PIÙ DI UNA CIFRA?

Nel caso della divisione, purtroppo non esiste un algoritmo analogo a quello semplicissimo dei prodotti parziali che si usa nella moltiplicazione (grazie alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma). Quindi bisogna inventare qualche modo di aggirare l'ostacolo.

Qui appresso vi descrivo, per mezzo di esempi, un algoritmo che risolve il problema con un certo numero (finito!) di approssimazioni successive; il tutto è un po' macchinoso ma funziona. Qualcuno potrà apprezzarne la stretta parentela con il metodo della 'falsa posizione' che era già conosciuto dai sapienti delle antiche civiltà.

Siccome non ho potuto consultare le pubblicazioni di Genaille e Lucas (*), non sono in grado di dire se anch'essi si siano posti il problema e, nel caso, come l'abbiano risolto.

(*) Vedi il Laboratorio che conclude questa nota.

UN ALGORITMO CHE RISOLVE IL PROBLEMA.

Adottiamo intanto i seguenti simboli: ***DD*** per il dividendo
DS “ divisore
Q “ quoziente
R “ resto ($0 \le R < DS$)

e ricordiamoci che $DD : DS = Q$ col resto di R (1)
equivale a $DD = Q \times DS + R$ (2)

Adesso mettiamo il caso di dover calcolare 29967:809.

PASSO 0 Prendiamo la cifra di sinistra del divisore (8) e assumiamo questo 8 come divisore ‘di prova’ il quale, avendo una sola cifra, rientra nelle capacità dei regoli.

PASSO 1 Con i nostri regoli per dividere calcoliamo 29967:8 = 3745 resto 7.
Questo risultato lo interpretiamo però come 29967:800 = 37,45 (il resto è sempre 7, ma non c’interessa per il seguito) e prendiamo 37,45 come una prima approssimazione, calcolata ‘per eccesso’, del nostro quoziente ‘vero’. Anzi, per semplificarci la vita, lo arrotondiamo, ancora per eccesso, all’intero superiore (38).

PASSO 2 Adesso prendiamo i regoli per moltiplicare e calcoliamo 809x38 = 30742 dopodiché facciamo, a mano, la sottrazione 30742-29967 = 775.
Giunti a questo punto, sappiamo quindi che

29967 = 809x38-775 (3)

PASSO 3 Il fatto che 775< 809 ci avverte che siamo arrivati al passo conclusivo.
Però, confrontando (3) con (2), ci accorgiamo che -775 è un numero negativo e quindi non rappresenta un resto bensì un ‘ammanco’. Allora lo sforzo finale consiste nel diminuire di 1 il quoziente calcolato per eccesso (38-1 = 37) e di sommare algebricamente il divisore (809) all’ammanco (-775) ovvero 809-775 = 34. La (3) diventa allora

29967 = 809x37+34 (4)

che traduciamo nella forma (1) per ottenere finalmente

29967:809 = 37 col resto di 34.

NOTA. Ecco, per pignoleria, il dettaglio dei passaggi che portano da (3) a (4):
29967 = 809x38-775 = 809x(37+1)-775 = 809x37+809-775 = 809x37+34

Abbiamo speso molte parole ma, a ben guardare, il tutto ha comportato solo quattro operazioni aritmetiche (quelle evidenziate in rosso): una divisione e una moltiplicazione (fatte con i regoli) e due sottrazioni (fatte a mano).

Per chi avesse ancora voglia di seguirmi, ecco un esempio un po’ più complicato:

22967:851 = ?

‘Idem’, qui appresso, significa: come nell’esempio precedente.

<u>PASSO 0</u> Idem: 8 è il divisore ‘di prova’.

<u>PASSO 1</u> Idem: il quoziente calcolato per eccesso è 38.

<u>PASSO 2</u> 851x38 = 32338
32338-29967 = 2371.

<u>PASSO 3</u> 29967 = 851x38-2371 (5)
Il valore assoluto dell’ammanco è 2371 > 851 e quindi il procedimento non è concluso: dobbiamo perciò reiterare i Passi 1 e 2 prendendo questa volta come dividendo il valore assoluto dell’ammanco (2371).

<u>PASSO 4</u> 2371:8 = 296 con resto 3
ovvero 2371:800 = 2,96 con resto 3
2,96 arrotondato per eccesso è 3.

<u>PASSO 5</u> 851x3 = 2553
2553-2371 = 182.

<u>PASSO 6</u> 2371 = 851x3-182 (6)
182 < 851: siamo al passo conclusivo dell’iterazione con il dividendo 2371.
Concateniamo (5) con (6) e otteniamo (vedi NOTA)
29967 = 851x35+182
ovvero 29967:851 = 35 con resto 182 che è il risultato finale.

NOTA. I passaggi del concatenamento di (5) con (6) si svolgono come segue
29967 = 851x38-2371= 851x38-(851x3-182) = 851x(38-3)+182 = 851x35+182 ma, in concreto, l’unica operazione da fare è la sottrazione 38-3 = 35.

Anche in questo caso c’è da ragionare un po’ (un buon massaggio al cervello) ma le effettive operazioni aritmetiche richieste dall’intero svolgimento sono quelle evidenziate in rosso, con l’aggiunta di quella nascosta nel Passo 1: due divisioni e due moltiplicazioni (con i regoli) e tre sottrazioni (a mano).

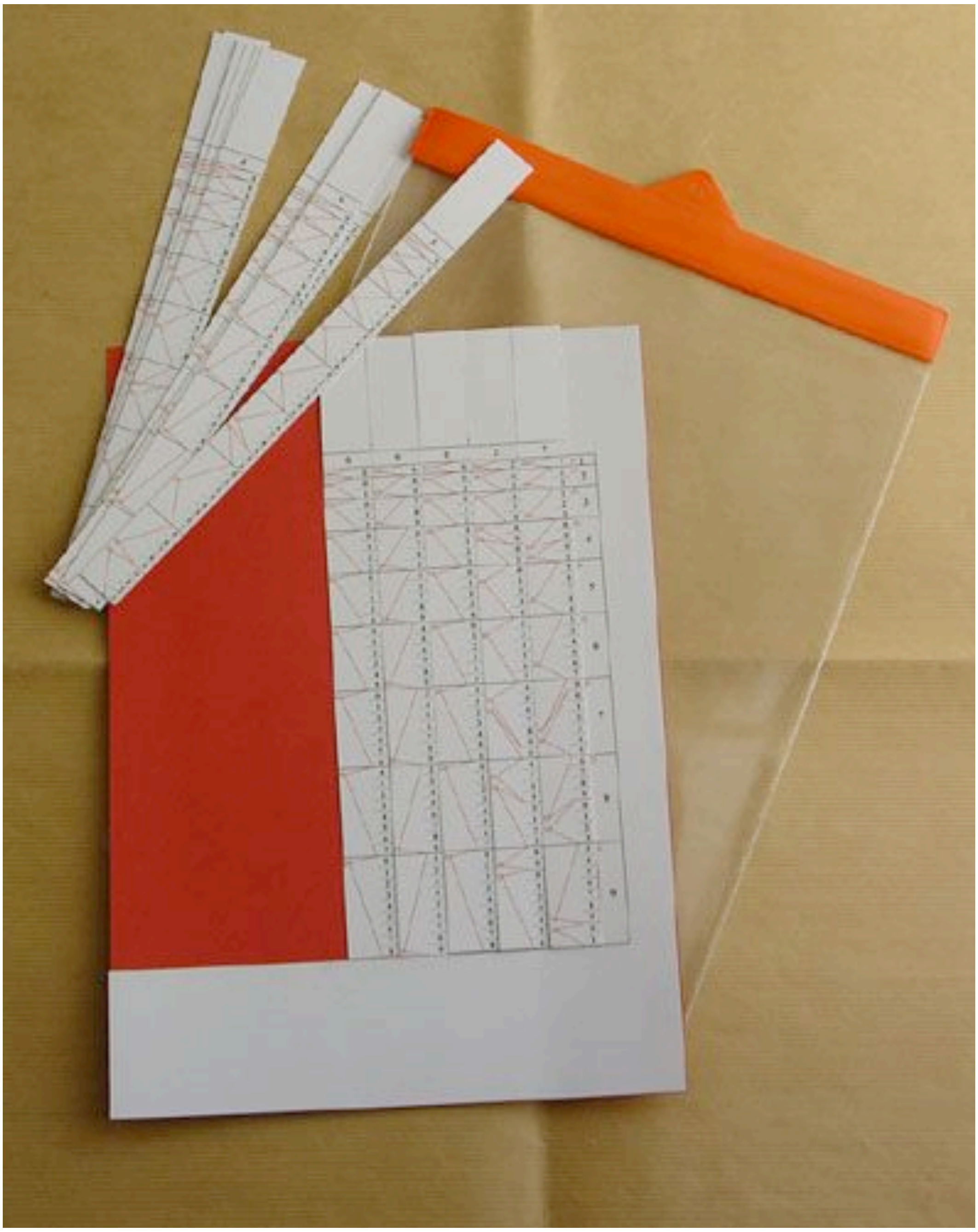
Di questo algoritmo esiste il ‘duale’ che consiste nel procedere ‘per difetto’ anziché ‘per eccesso’. Il lettore curioso potrà divertirsi a svilupparlo per sua soddisfazione e chiedersi in quali circostanze sia più efficiente l’uno o l’altro.

regoli di Genaille per dividere - approfondimenti

LABORATORIO

regoli di Genaille per moltiplicare e dividere

Un set di regoli per moltiplicare, fatti in legno all’epoca dell’inventore Henry Genaille: ingegnere delle ferrovie francesi e ingegnoso matematico dilettante, vissuto tra Ottocento e Novecento.
Alla fama dei regoli e del loro inventore contribuì Édouard Lucas, suo amico e matematico di discreta fama.

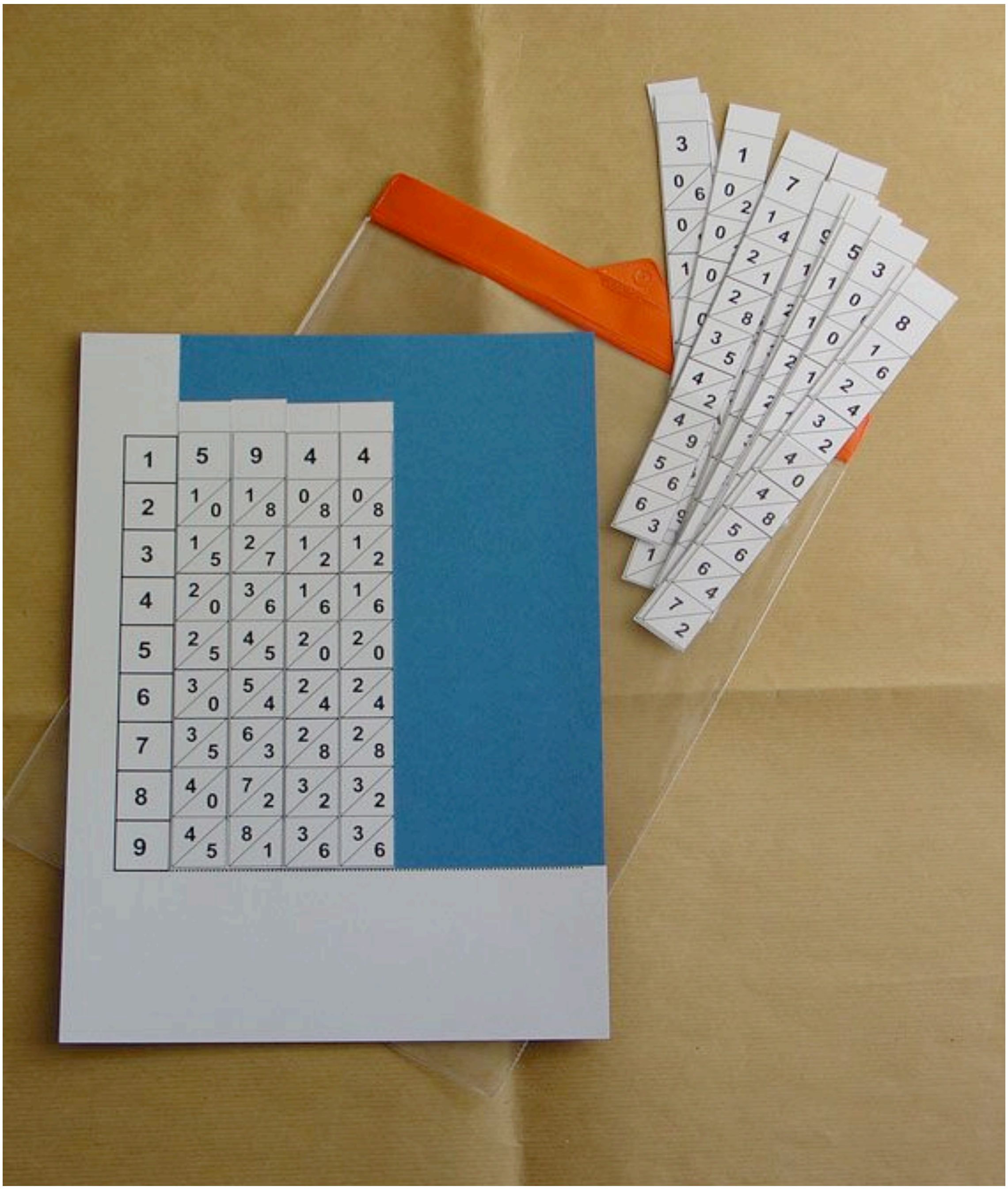


Un set moderno, per giocare alle moltiplicazioni

regoli di Genaille per moltiplicare e dividere - laboratorio

Un set moderno,
per giocare alle divisioni

regoli di Genaille per moltiplicare e dividere - laboratorio



I bastoncini di Nepero (li conoscete?), anch’essi sotto forma di set ludico

regoli di Genaille per moltiplicare e dividere - laboratorio