TRACCIA PER LA LEZIONE 2-3

martedì 29 aprile, ore 16^{30}-18^{15}, aula I

ARGOMENTI

ABACHI.

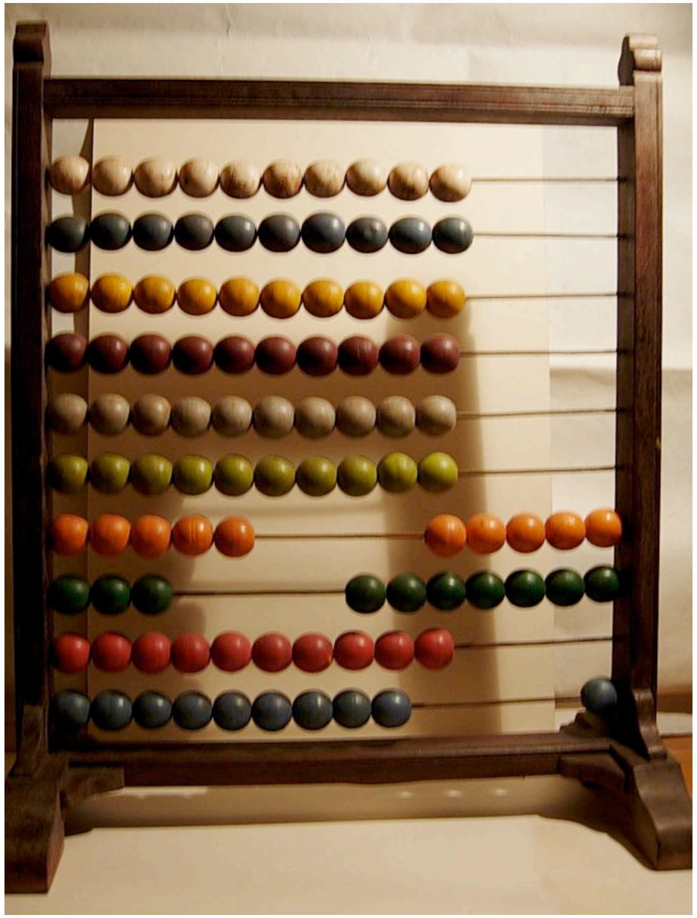
ALTRI AUSILI PER IL CALCOLO NUMERICO.

Abaco = il più antico e longevo strumento meccanico (macchina?) di ausilio al calcolo. Un notevole salto tecnologico rispetto alla mera rappresentazione numerica.

Caratteristiche salienti

- Notazione posizionale (con rappresentazione implicita dello zero).
- Sistema a base 10 (o equivalente biquinario).
- Due linee di sviluppo:
    - abaco a pallottoliere;
    - abaco da tavolo a gettoni (la forma più antica).

Abachi a pallottoliere



Pallottoliere "decimale" (Europa occidentale)

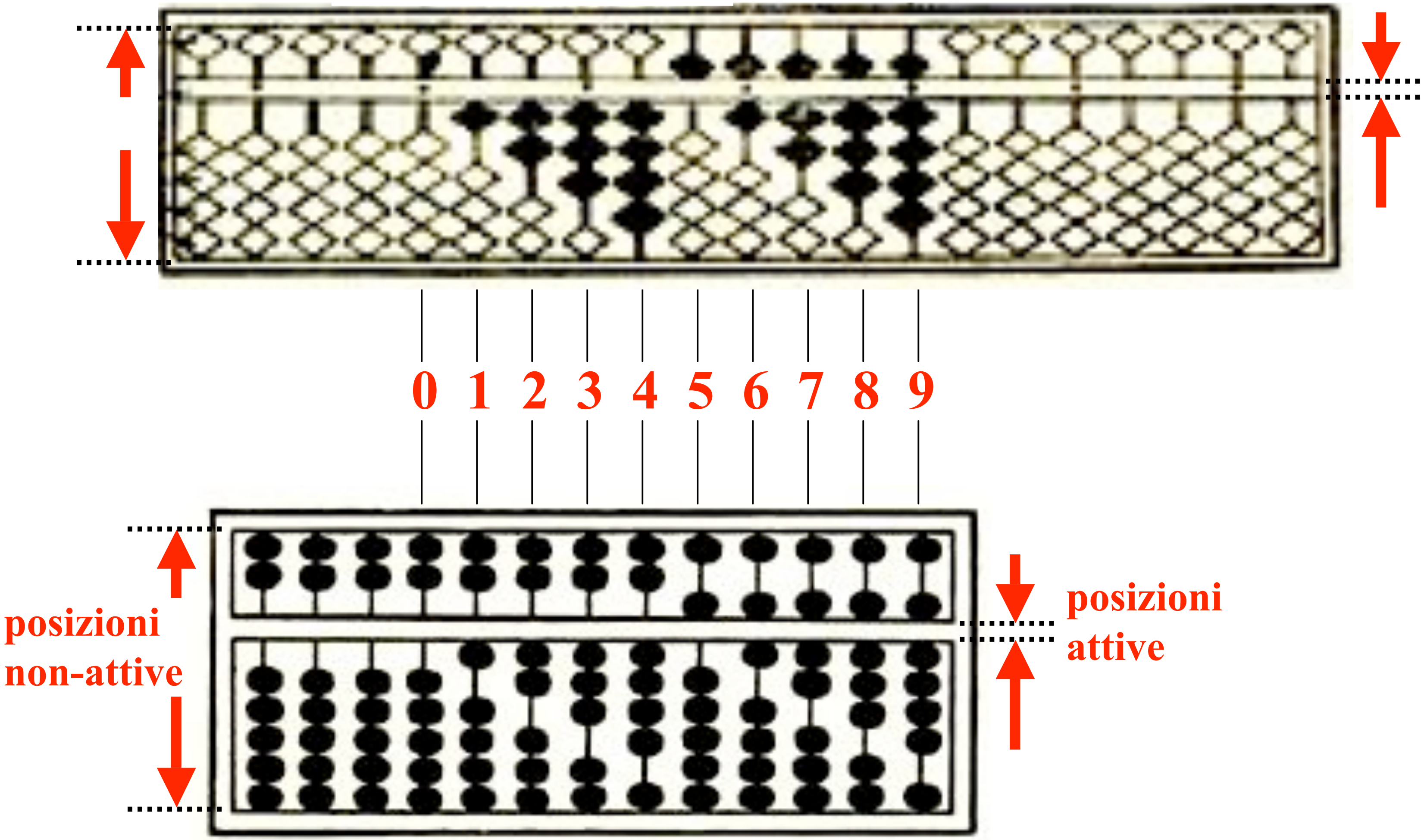
***Schoty* russo**

: mancano 2 perline

Rappresentazione delle cifre nel pallottoliere europeo ad uso didattico

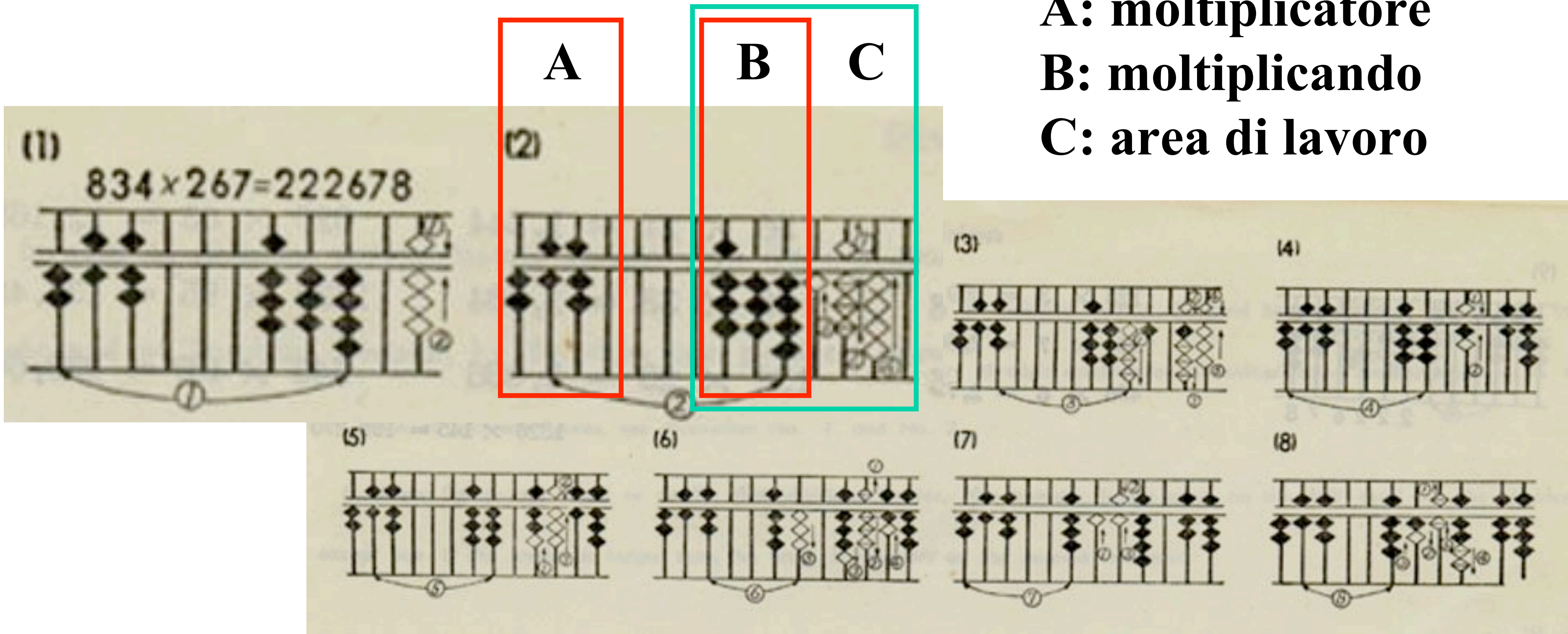
Esistono anche pallottolieri “economici” con solo 9 perline in ogni fila; la decina si deve allora rappresentare attivando una perlina nella fila di ordine superiore.

Pallottolieri biquinari



Rappresentazione delle cifre nei pallottolieri biquinari

27 cifre!?



A: moltiplicatore
B: moltiplicando
C: area di lavoro

Un semplice algoritmo usato dagli abachisti per il calcolo della radice quadrata di numeri “piccoli” (ce ne sono altri, più adatti per numeri “grandi”):

Sottrarre successivamente dal radicando n^2 i numeri dispari consecutivi a partire da 1.

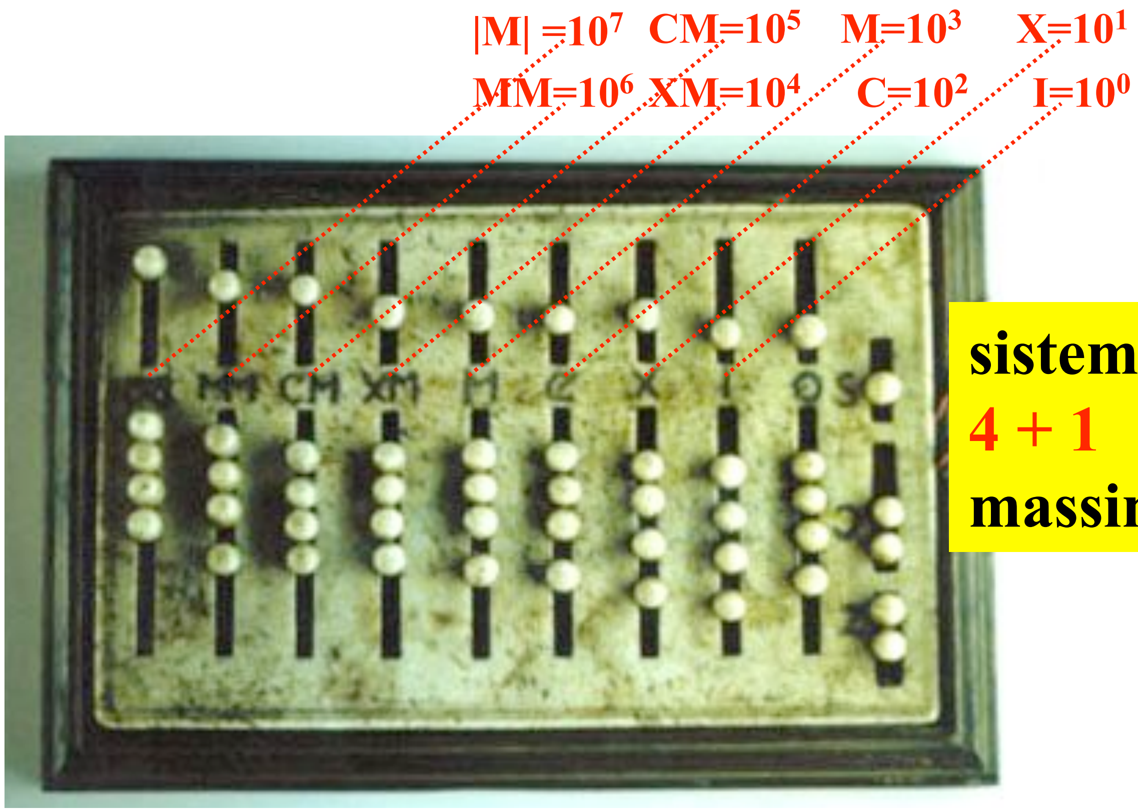
Quando il radicando, progressivamente diminuito di 1, poi di 3 e così avanti fino a d_n, diventa minore di d_{n+1} allora n è il valore della radice quadrata, approssimato per difetto. Nel caso fortunato in cui diventa nullo, allora n è il valore esatto.

Il “trucco” sottostante è l’identità

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + d_n = n^2$$

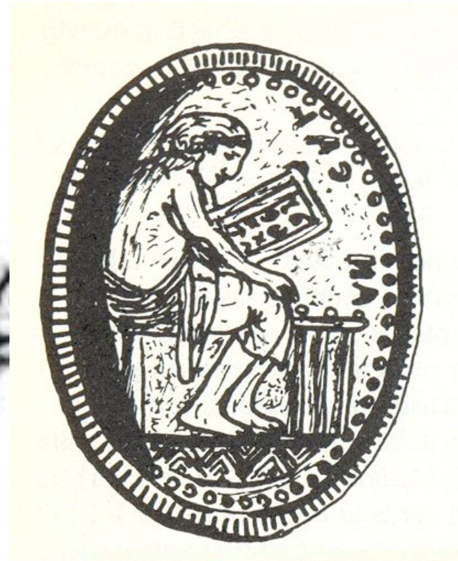
dove d_n designa l’ennesimo numero dispari.

Abaco tascabile romano (II sec.)



sistema
4 + 1
massima economia

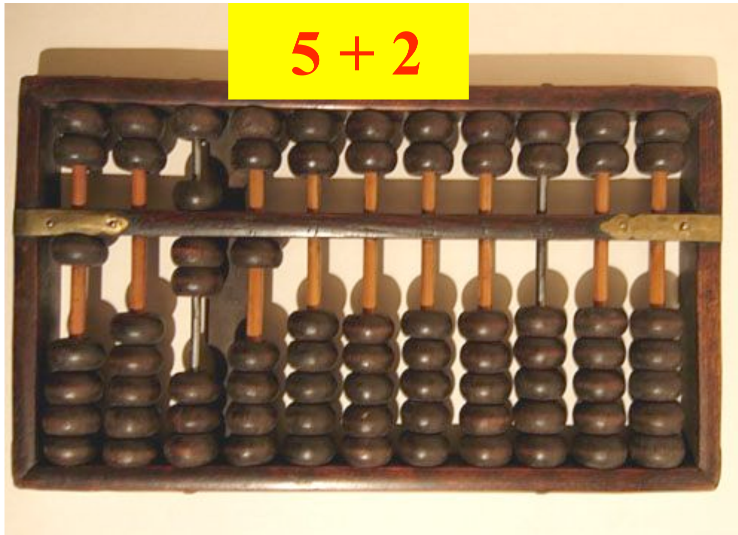
Se ne conoscono esemplari in osso/avorio e in bronzo. Le due colonne di destra vanno interpretate in relazione al sistema di unità, non decimali, basate sull'*uncia* (oncia) e sull'*as* (asse).



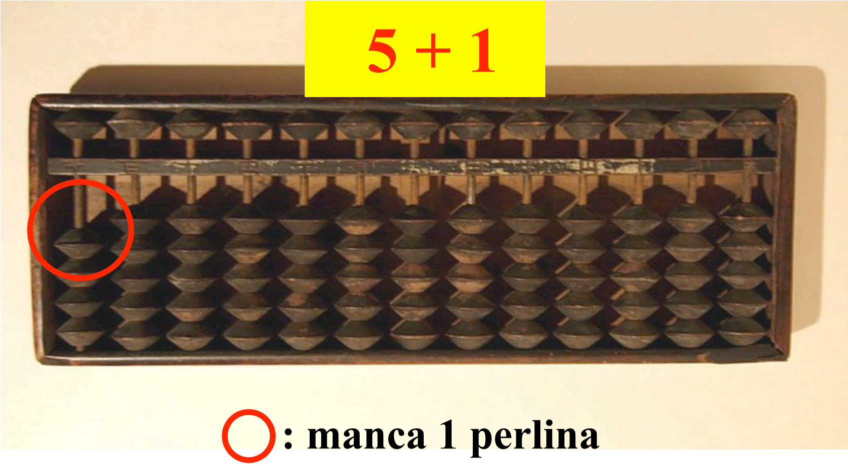
Computista etrusco (incisione su pietra)

Contabilità nell’antica Roma Bassorilievo di Trier (Treviri)

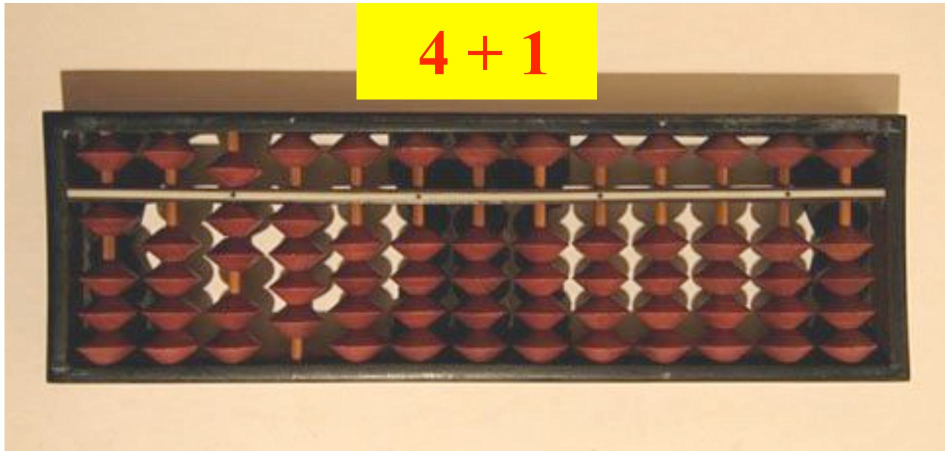
Computista romano (mosaico)



***Swan pan* cinese**



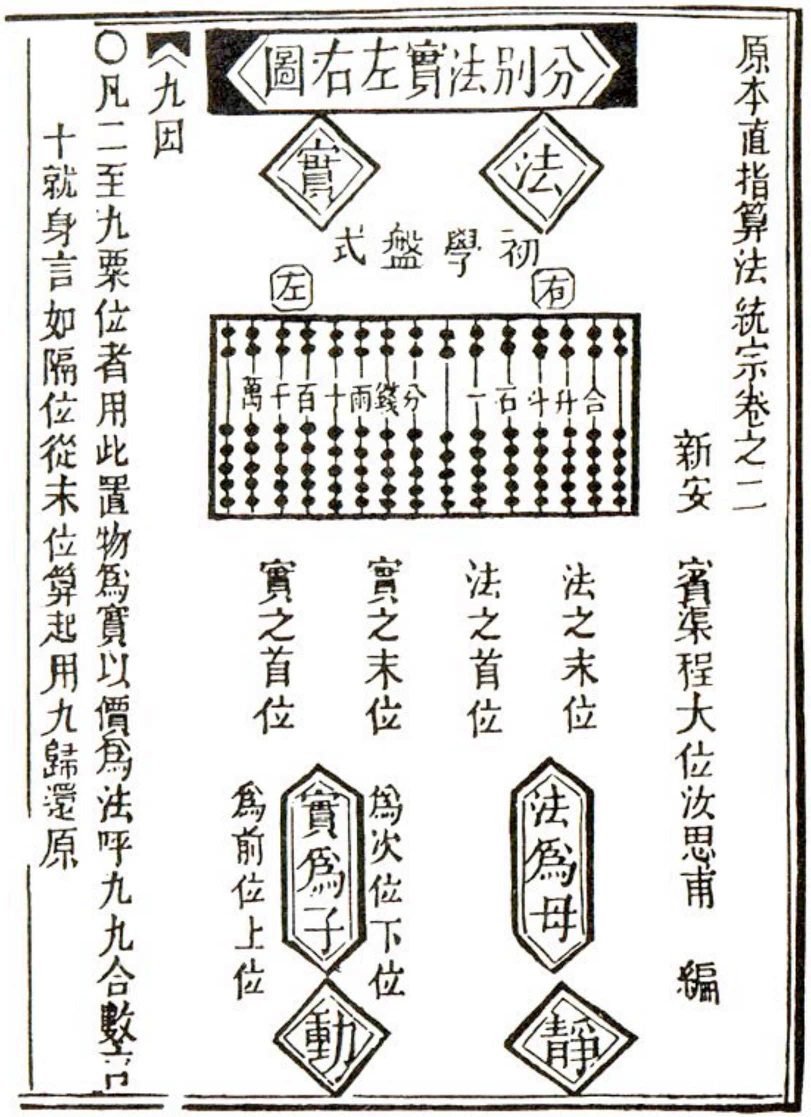
***Soroban* giapponese**



***Soroban* giapponese “moderno”**

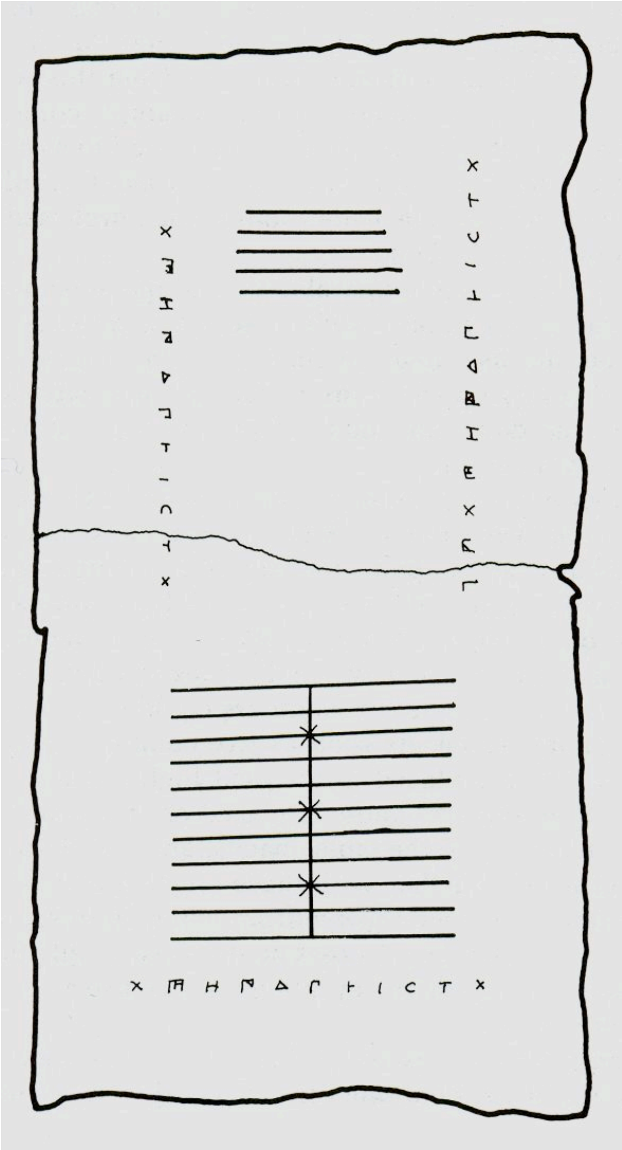
Scuola di aritmetica in una stampa cinese dell’Ottocento

Scena giapponese di contabilità in una stampa del Settecento



Istruzioni per l'uso del *swan pan* in un manuale cinese del 1593

Abachi da tavolo a gettoni

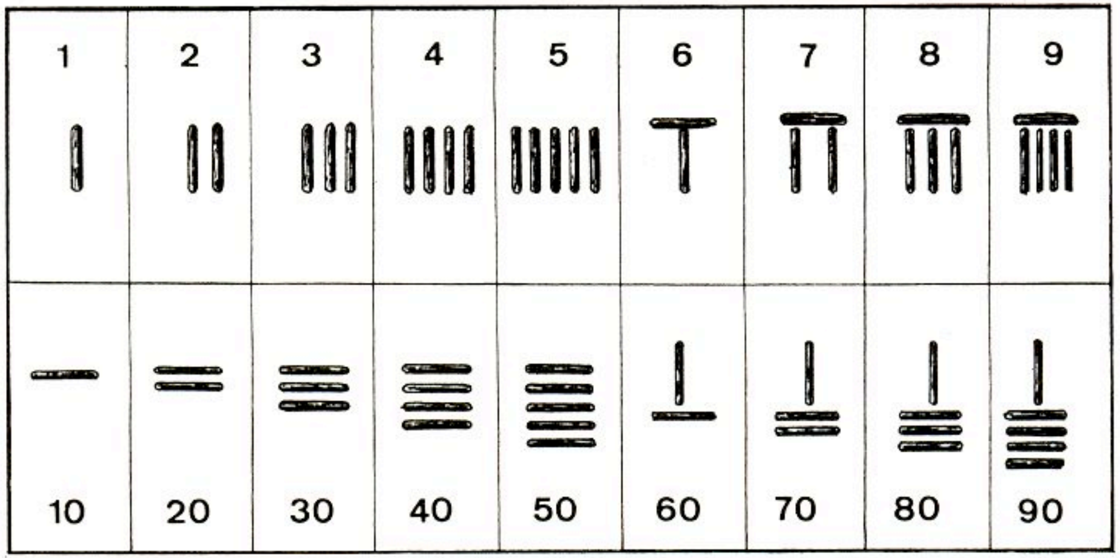


La più antica attestazione di abaco da tavolo, incisa su lastra di pietra:

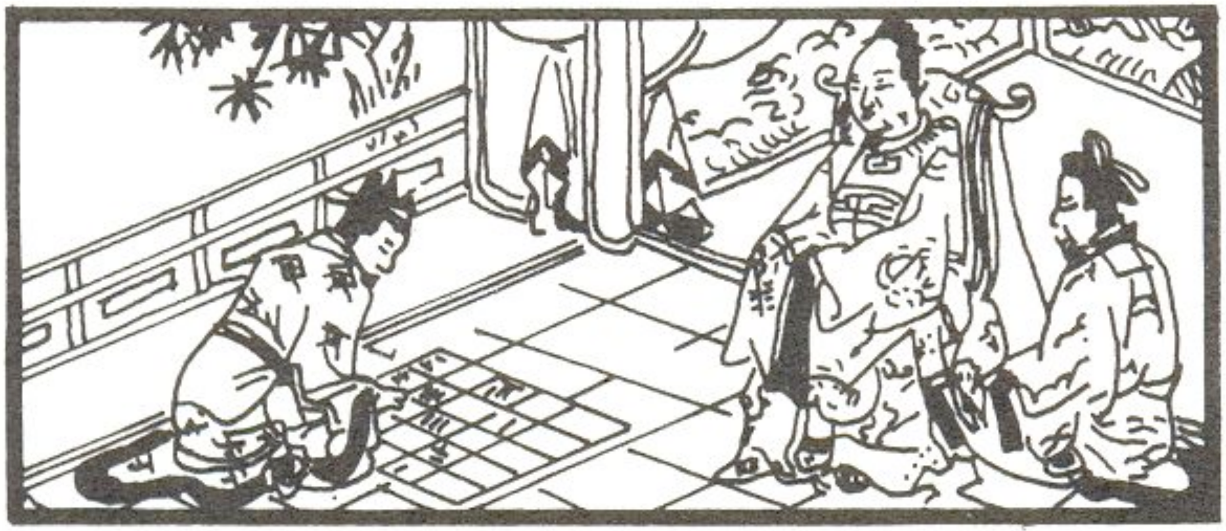
la “Stele di Salamina” (VI-V sec. a.C.)

Abachista greco
(pittura su vaso)

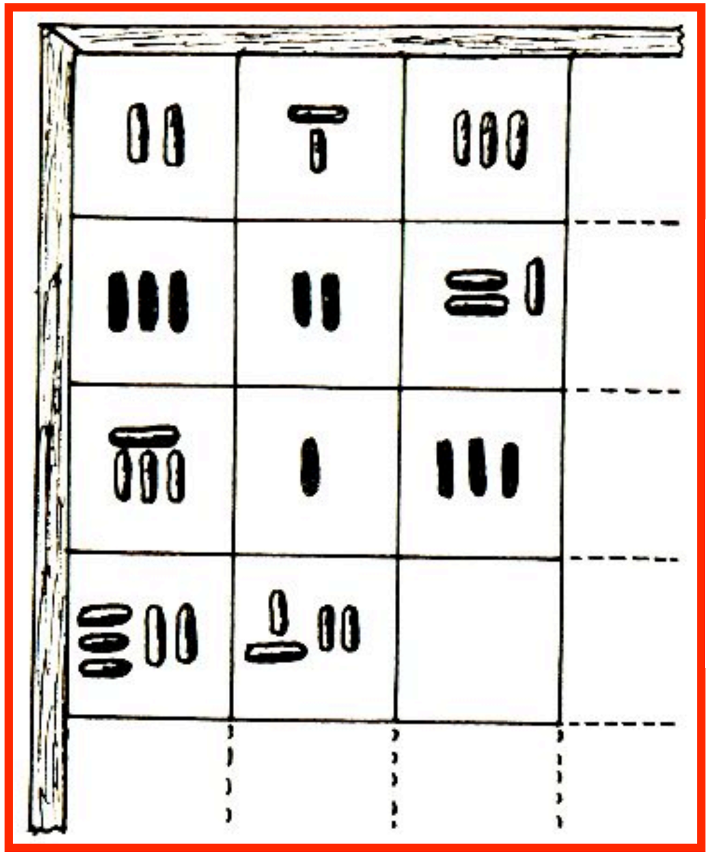
<u>Tavolo di calcolo cinese</u> (abaco "algebrico")



Notazione numerica a bastoncelli



Rappresentazione di un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite sull'abaco algebrico. (Da un trattato cinese di matematica dell'inizio del II sec. D.C.)



x	2	6	3
y	–3	–2	21
z	8	–1	–3
	32	62	0

colonna di sinistra: coefficienti dell'equazione

$$2x - 3y + 8z = 32$$

colonna centrale: coefficienti dell'equazione

$$6x - 2y - z = 62$$

colonna di destra: coefficienti dell'equazione

$$3x + 21y - 3z = 0$$

Assolutamente notevoli, data l'epoca, l'uso dei numeri negativi (bastoncelli scuri) e l'algoritmo di calcolo, qui non illustrato, che corrisponde esattamente al metodo di eliminazione detto "di Gauss"

RICHIAMO SULL'ALGORITMO DI ELIMINAZIONE, DETTO DI GAUSS - UN ESEMPIO

Sia da risolvere il sistema descritto nella slide precedente (tre equazioni lineari in tre incognite)

$$\begin{cases} EQ_1 \\ EQ_2 \\ EQ_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 8z = 32 \\ 6x - 2y - z = 62 \\ 3x + 21y - 3z = 0 \end{cases}$$

calcoliamo $EQ_1 + 8 \times EQ_2 = EQ_4$ ovvero

$$\begin{array}{r} 2x - 3y + 8z = 32 \\ 48x - 16y - 8z = 496 \\ \hline 50x - 19y \quad = 528 \end{array}$$

calcoliamo $3 \times EQ_2 - EQ_3 = EQ_5$ ovvero

$$\begin{array}{r} 18x - 6y - 3z = 186 \\ - 3x - 21y + 3z = 0 \\ \hline 15x - 27y \quad = 186 \end{array}$$

calcoliamo $27 \times EQ_4 - 19 \times EQ_5 = EQ_6$ ovvero

$$\begin{array}{r} 1350x - 513y = 14256 \\ - 285x + 513y = -3534 \\ \hline 1065x \quad = 10722 \end{array}$$

Il sistema è ora trasformato in

$$\begin{cases} EQ_6 \\ EQ_4 \\ EQ_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1065x = 10722 \\ 50x - 19y = 528 \\ 3x + 21y - 3z = 0 \end{cases}$$

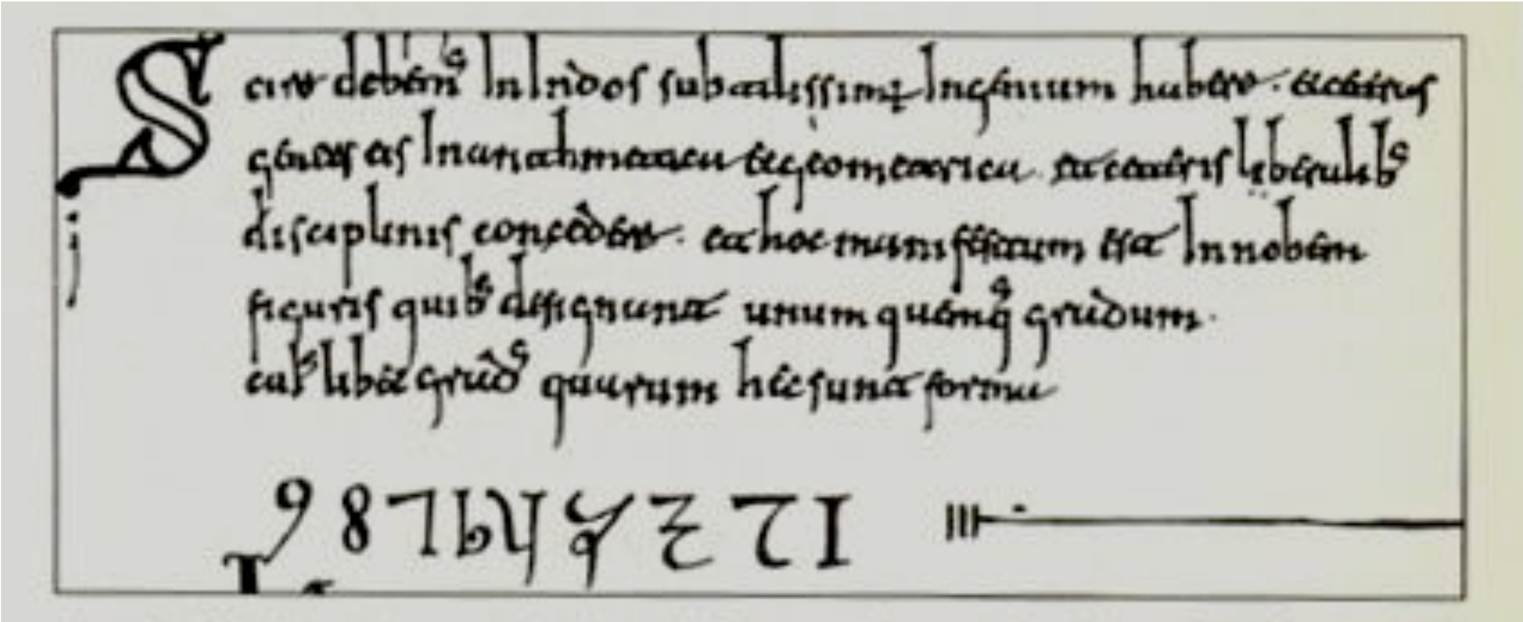
da cui: $\underline{x = 3574 / 355}$

$50 \times 3574 / 355 - 19y = 528$; $\underline{y = - 92 / 71}$

$3 \times 3574 / 355 -21 \times 92 / 71 -3z = 0$; $\underline{z = 354 / 355}$

La regola sottostante è la sostituzione di un'equazione con una combinazione lineare di equazioni comprese nel sistema.
Le combinazioni lineari utili alla soluzione sono costruite in modo da eliminare progressivamente la *z* (EQ_4 e EQ_5) e la *y* (EQ_6).
Una volta ricavato il valore di *x* da EQ_6, si procede a ritroso risolvendo per sostituzione: da EQ_4 si ricava il valore di *y* e da EQ_1 quello di *z*.
È evidente che l'algoritmo si può generalizzare per la soluzione di un sistema di *n* equazioni lineari in *n* incognite.

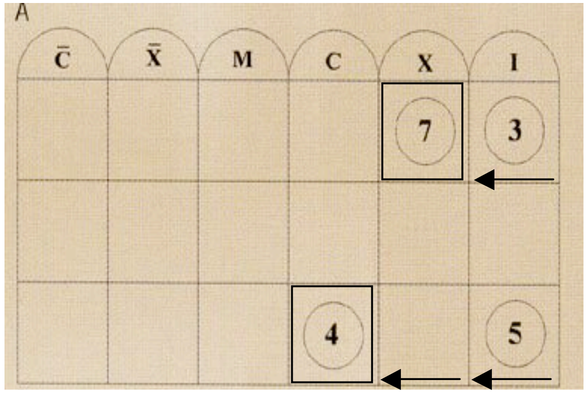
Cifre indo-arabe senza lo ZERO; …...

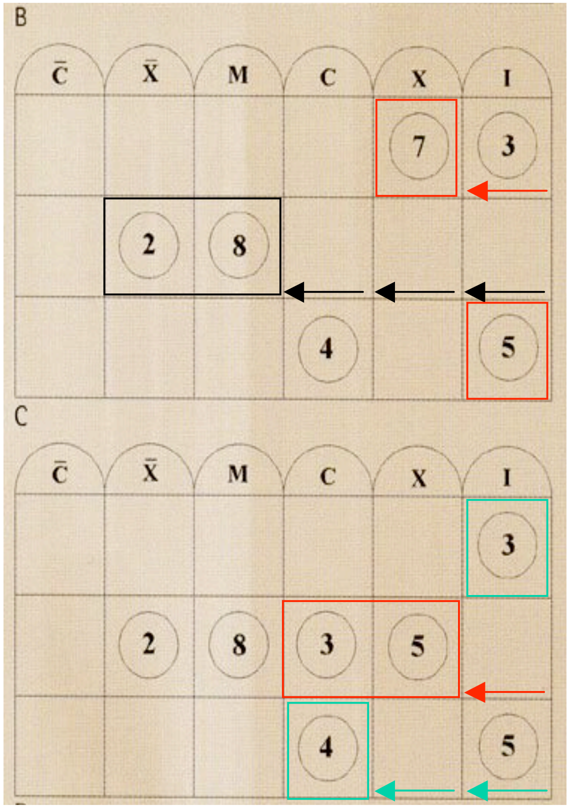


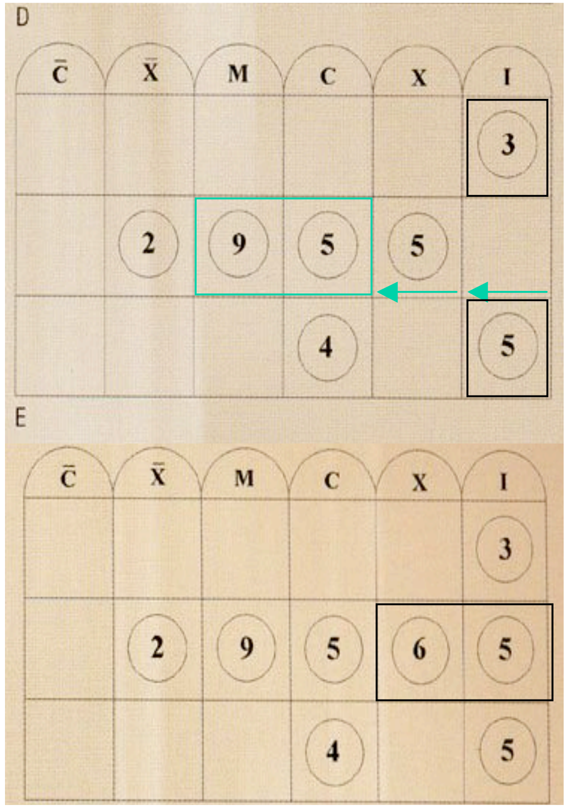
(manoscritto spagnolo datato 976)

…… come calcolare?

risponde l'abaco di Gerberto (*)







73 x 405 = 29565

Prerequisiti:
tavola pitagorica;
addizione.

(*) Gérbrèrt d'Aurillac (Papa Silvestro II; intorno all'anno Mille).
In tutti i tipi di abaco da tavolo il valore dei gettoni dipende esclusivamente dalla loro posizione; questo di Gerberto è l'unico in cui i gettoni recano impresso un valore numerico.

Introduzione della decima cifra: lo ZERO.

Dall’India alla cultura araba medievale e da questa all’Europa.

Liber abbaci **(1202), opera di Leonardo Pisano, detto Fibonacci.**

Oltre che come cifra (fondamentale per la notazione posizionale), lo zero comincia ad essere considerato come un numero a tutti gli effetti (seppure con proprietà un po’ particolari, come del resto anche il numero uno).

Nuovi algoritmi “con carta e matita”.

ALCUNI RICHIAMI DI ARITMETICA …

NOTAZIONE POSIZIONALE IN BASE *b* (Per brevità, ci si limita agli interi non negativi)

Si ha un insieme di b simboli (alfabeto delle cifre) $\mathbf{S}_b = \{S_1, S_2 \ldots S_b\}$ che rappresentano, nell'ordine, i valori numerici 0, 1, 2, … b-1 ($b \geq 2$).

La stringa ordinata (e non vuota) di cifre

$$C_k C_{k-1} \ldots C_1 C_0 \qquad (C_i \in \mathbf{S}_b,\ i = 0, 1, \ldots k\ ;\ C_k \neq 0 \text{ se } k > 0)$$

è una comoda e sintetica notazione convenzionale per rappresentare in base b il numero

$$n_b = C_k \times b^k + C_{k-1} \times b^{k-1} + \ldots\ C_1 \times b^1 + C_0 \times b^0$$

ESEMPI

Esadecimale. $b = 16$; $\mathbf{S}_{16} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

$$A07F_{16} = A \times 16^3 + 0 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + F \times 16^0 = 1041087_{10}$$

Decimale. $b = 10$; $\mathbf{S}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$94003_{10} = 9 \times 10^4 + 4 \times 16^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Binario. $b = 2$; $\mathbf{S}_2 = \{0, 1\}$

$$100110_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 38_{10}$$

N.B. In quanto sopra, ove non espressamente indicato dal pedice, i numeri s'intendono rappresentati nel modo usuale (notazione posizionale in base 10).

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO RISPETTO ALLA SOMMA

$a \times (b + c + d + \ldots) = a \times b + a \times c + a \times d + \ldots$

ALGORITMO DI MOLTIPLICAZIONE MEDIANTE PRODOTTI PARZIALI

Sia da calcolare il prodotto $x \times y$ con il moltiplicatore $y = C_k\, C_{k\text{-}1} \ldots C_1 C_0 = C_k \times b^k + C_{k\text{-}1} \times b^{k\text{-}1} + \ldots\ C_1 \times b^1 + C_0 \times b^0$.

Allora $x \times y = x \times (C_k \times b^k + C_{k\text{-}1} \times b^{k\text{-}1} + \ldots\ C_1 \times b^1 + C_0 \times b^0) = x \times C_k \times b^k + x \times C_{k\text{-}1} \times b^{k\text{-}1} + \ldots\ x \times C_1 \times b^1 + x \times C_0 \times b^0$

e l'espressione $x \times C_k \times b^k + x \times C_{k\text{-}1} \times b^{k\text{-}1} + \ldots\ x \times C_1 \times b^1 + x \times C_0 \times b^0$ descrive compiutamente l'algoritmo dei prodotti parziali in cui si fa uso sia della notazione posizionale e sia della proprietà distributiva.

ESEMPI

Decimale.

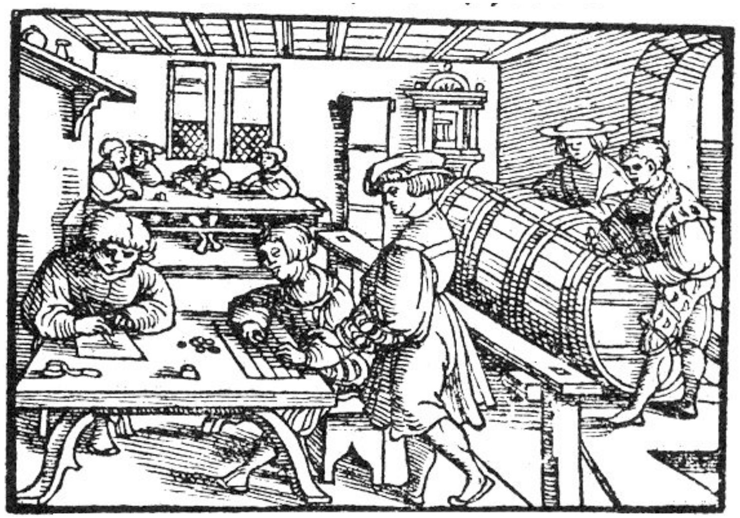
7426 ×	equivale a	7426 ×	eliminando gli zeri superflui	7426 ×
401 =		401 =	e sostituendoli con il corretto incolonnamento	401 =
7426×1×1+		7426	dei prodotti parziali, si ottiene l'usuale	7426
7426×0×10 +		0000	forma sintetica dell'algoritmo	29704
7426×4×100		2970400		2977826
		2977826		

Altri algoritmi con carta e matita (p.e. "gelosia") o con ausili strumentali (p.e. "bastoncini di Nepero") sono sostanzialmente equivalenti.

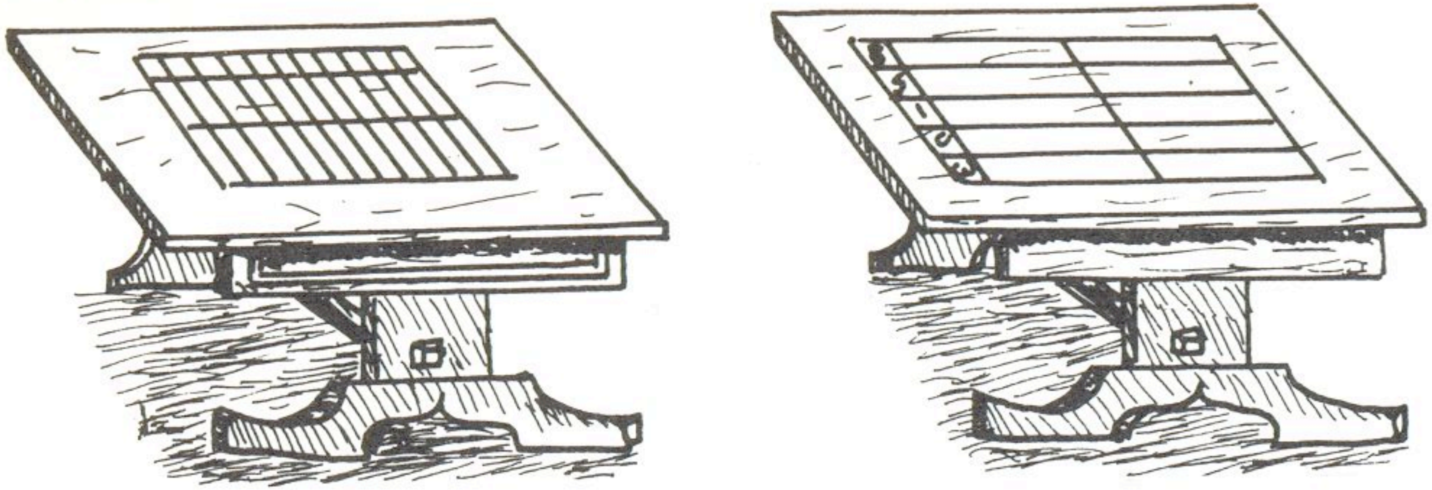
Binario. 10111×1101 = ?

direttamente in forma sintetica

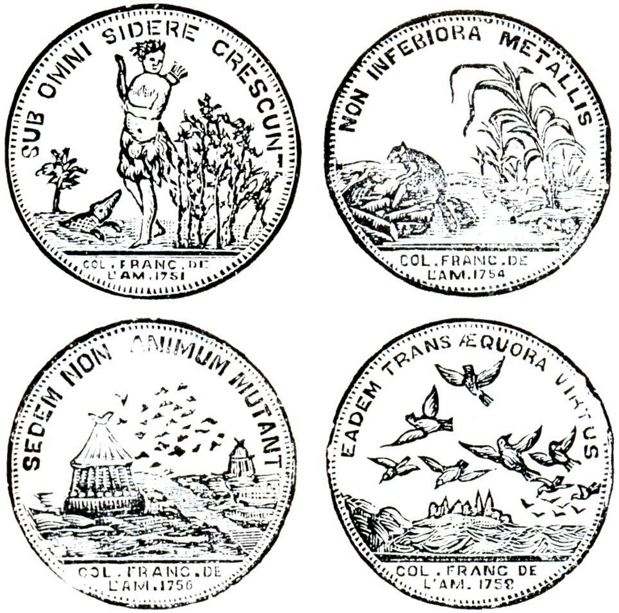
```
    10111 ×
     1101=
    -------
    10111
   10111
  10111
  ---------
  100101011
```



La contesa tra "algoristi" e "abachisti", illustrata in alcune edizioni cinquecentine.

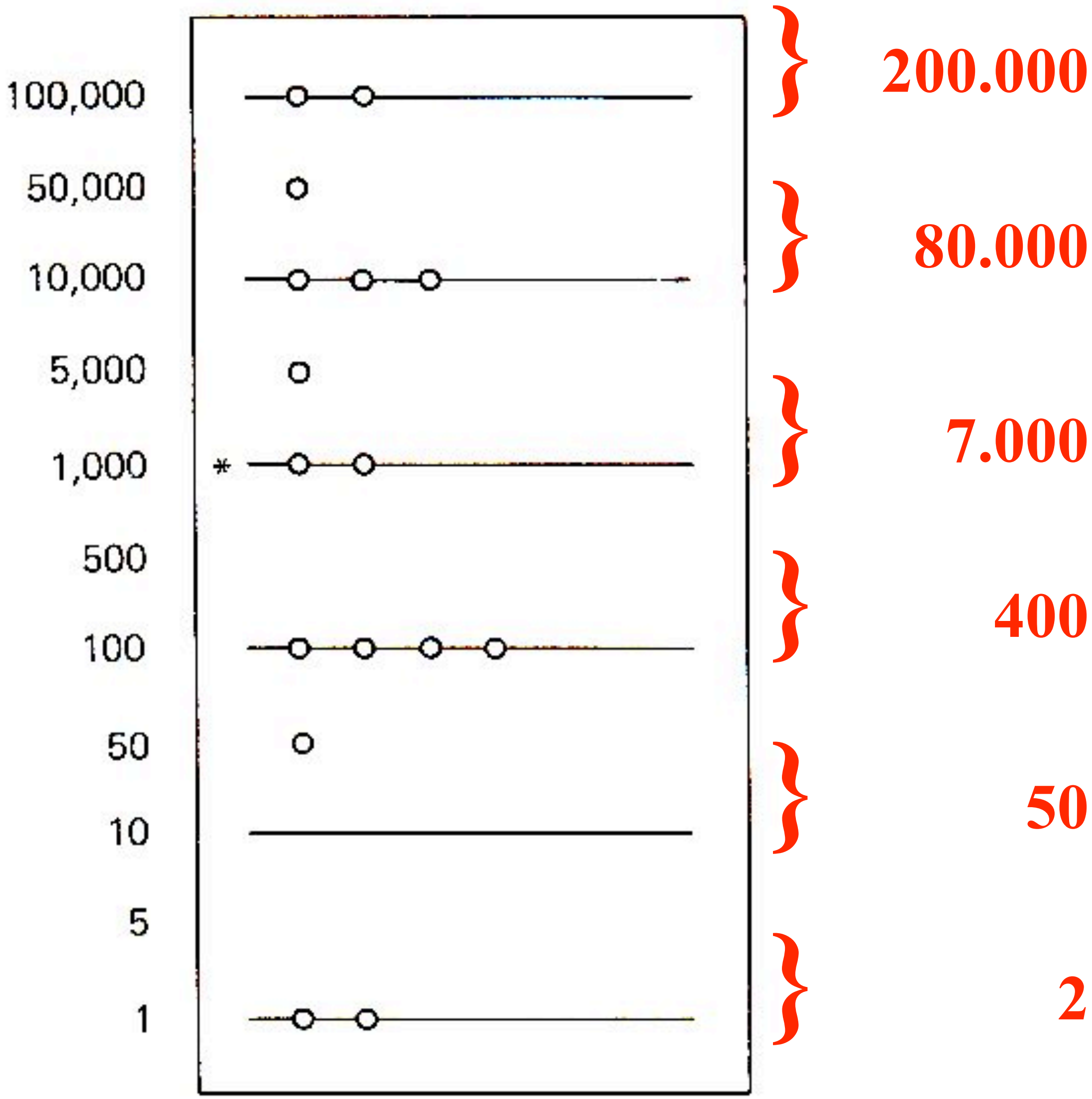


Abachi da tavolo di epoca rinascimentale.



Gettoni per abaco "personalizzati" (colonie francesi in America; XVIII sec.)

Rappresentazione delle cifre nell'abaco a gettoni



287452

L'ARITHMETIQUE
EN SA
PERFECTION,
MISE EN PRATIQUE SELON L'USAGE
DES FINANCIERS,
GENS DE PRATIQUE,
BANQUIERS, ET MARCHANDS,
Contenant une ample & familiere explication de ses Principes, tant en nombres entiers qu'en fractions.
Un Traité de Geometrie pratique appliquée à l'Arpentage & au Toisé, tant des Superficies que des Corps solides.
Et un autre Traité d'Arithmetique aux Jettons;
Un Abregé d'Algebre, suivy de quantité de Questions curieuses.
Derniere Edition, corrigée & augmentée.
Par F. LE GENDRE, Arithmeticien.

A PARIS,
Chez MICHEL GUIGNARD, & CLAUDE ROBUSTEL, rue S. Jacques, près la Fontaine S. Severin, à l'Image S. Jean.

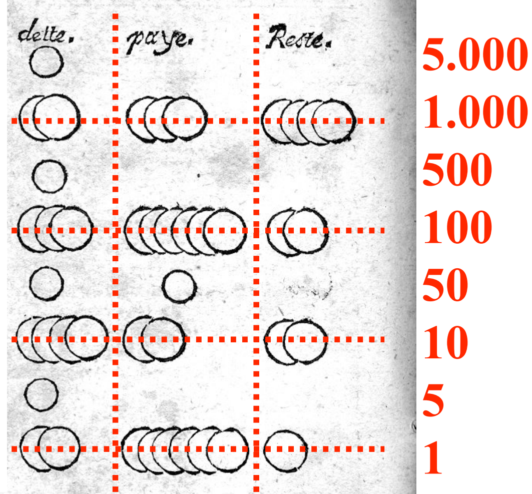
M. DCCXII.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

TRAITE'
DE L'ARITHMETIQUE
PAR LES JETTONS.

CETTE Arithmetique est aussi utile que celle qui se fait avec la plume; puisqu'avec des Jettons on fait toutes les Regles dont on a besoin dans tous les Calculs qui servent dans le Commerce: cette maniere de calculer est plus pratiquée par les femmes que par les hommes, cependant plusieurs personnes qui sont employées dans les Finances & dans toutes les Jurisdictions s'en servent avec beaucoup de succez. Les Maximes dont on se sert dans cette sorte de calculer sont semblables à celles qui se pratiquent avec la plume; car la Numeration, la Position, l'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division, seront définies comme elles l'ont été dans le Traité précedent; où on aura recours, si on en a besoin.

Dans sa pratique on employe des caracteres qui conviennent au Jet, & dont les Financiers se servent ordinairement, qui sont representez cy-dessous. Ceux à qui ils ne conviendront pas se serviront des chiffres de l'Arithmetique à la plume, s'ils le jugent à propos.

X. Figure.



de l'Arbre à main gauche; & on dit, qui de sept mil en paye trois, reste quatre, qu'on pose à main droite, sur le degré des mil; puis on dit, qui de huit cens en paye six, reste deux, qu'on pose encore à main droite, sur le degré des centaines: enfin, on dit, qui de sept en paye six, reste un, qu'on pose à main droite, sur le degré des nombres. Aprés avoir

7.897 - 3.676 = 4.221

Fino a tutto il XVIII secolo, i manuali di aritmetica "commerciale" dedicavano ampio spazio all'uso dell'abaco.

ARGOMENTI

ABACHI.

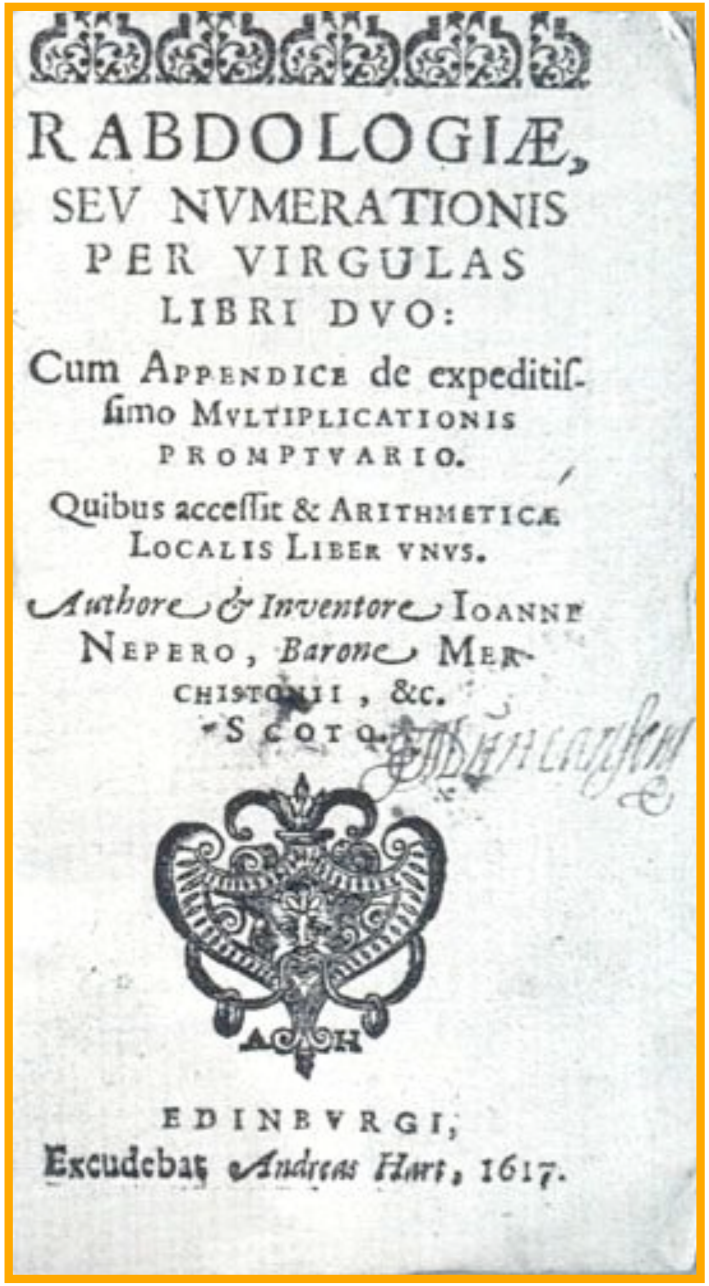
ALTRI AUSILI PER IL CALCOLO NUMERICO (Nepero; Genaille).

IL PROGETTO "RIDUZIONISTA" DI NEPERO ...
(John Napier, barone di Merchiston; 1550-1617)

Elevamento a esponente → **Moltiplicazione / Divisione** → **Somma / Sottrazione**

… REALIZZATO PER MEZZO DEI LOGARITMI ...
(tavole dei logaritmi naturali presentate nelle opere *Mirifici logaritmorum canonis descriptio / constructio*; 1619)

… E DI ALCUNI DISPOSITIVI DI CALCOLO
(descritti nell'opera *Rabdologiae, etc. libri duo*; 1617)



RABDOLOGIÆ,
SEV NVMERATIONIS
PER VIRGULAS
LIBRI DVO:
Cum Appendice de expeditis-
simo Multiplicationis
Promptuario.
Quibus accessit & Arithmeticæ
Localis Liber vnus.
Authore & Inventore Ioanne
Nepero, Barone Mer-
chistonii, &c.
Scoto.
EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart, 1617.

Nella "Rabdologia", opera nella quale sono descritti tre dispositivi per il calcolo numerico*:

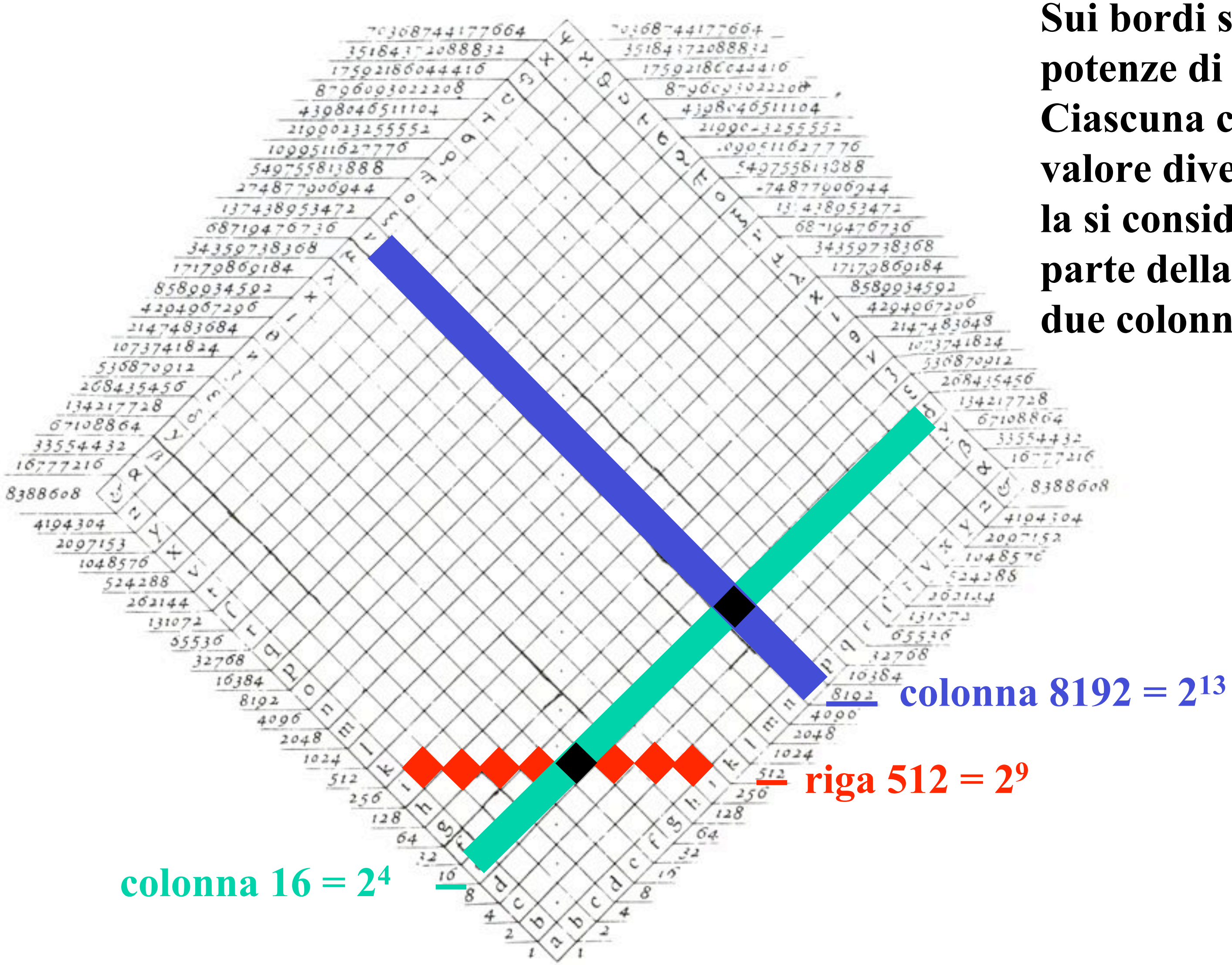
1 - Scacchiere binario

2 - Bastoncini di Nepero (*Napier's rods* o *bones*)

3 - *Multiplicationis promptuarium*.

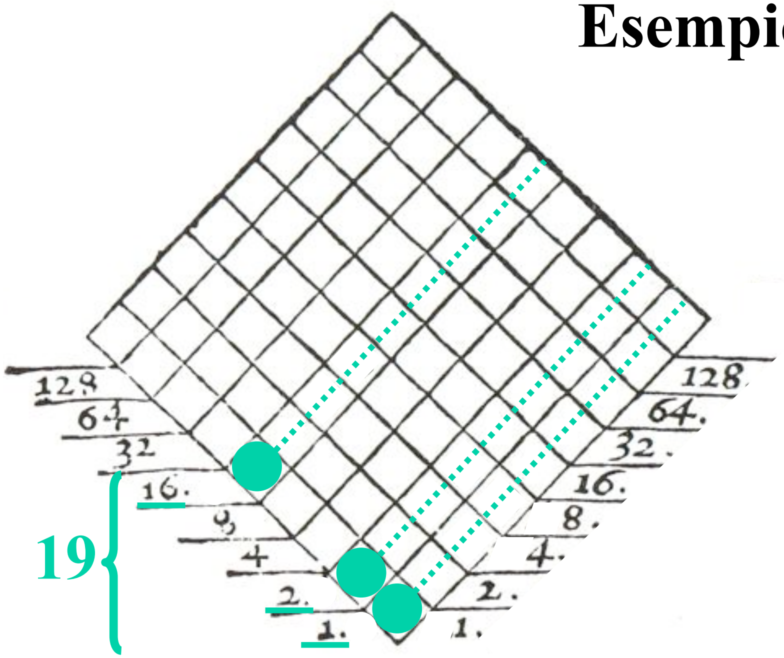
* Il regolo calcolatore, basato sui logaritmi "volgari" a base 10 introdotti da Henry Briggs, contemporaneo di Nepero, è invece uno strumento per il calcolo analogico.

Rabdologia / 1: Scacchiere binario

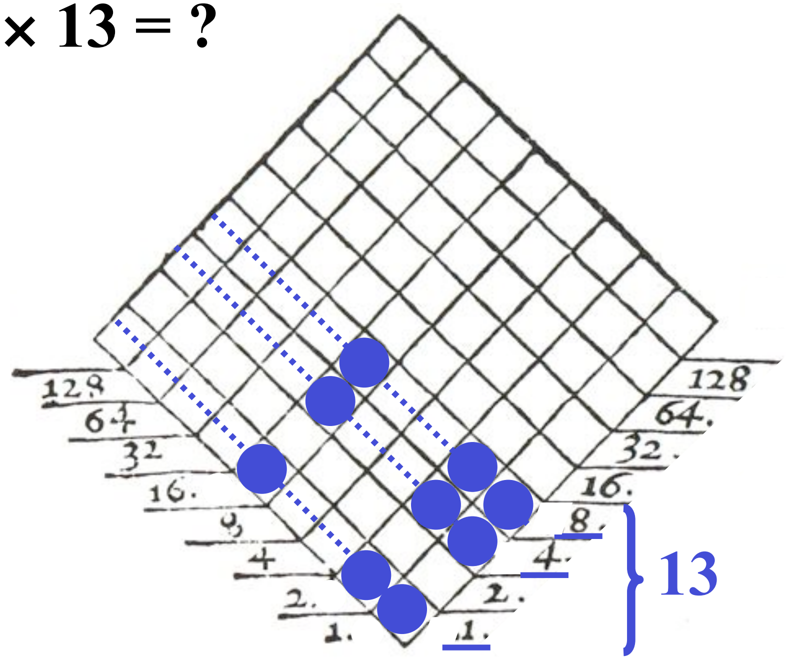


Sui bordi sono riportate le potenze di 2.
Ciascuna casella assume un valore diverso a seconda che la si consideri come facente parte della riga o di una delle due colonne a cui appartiene.

Esempio: 19 × 13 = ?



passo 1

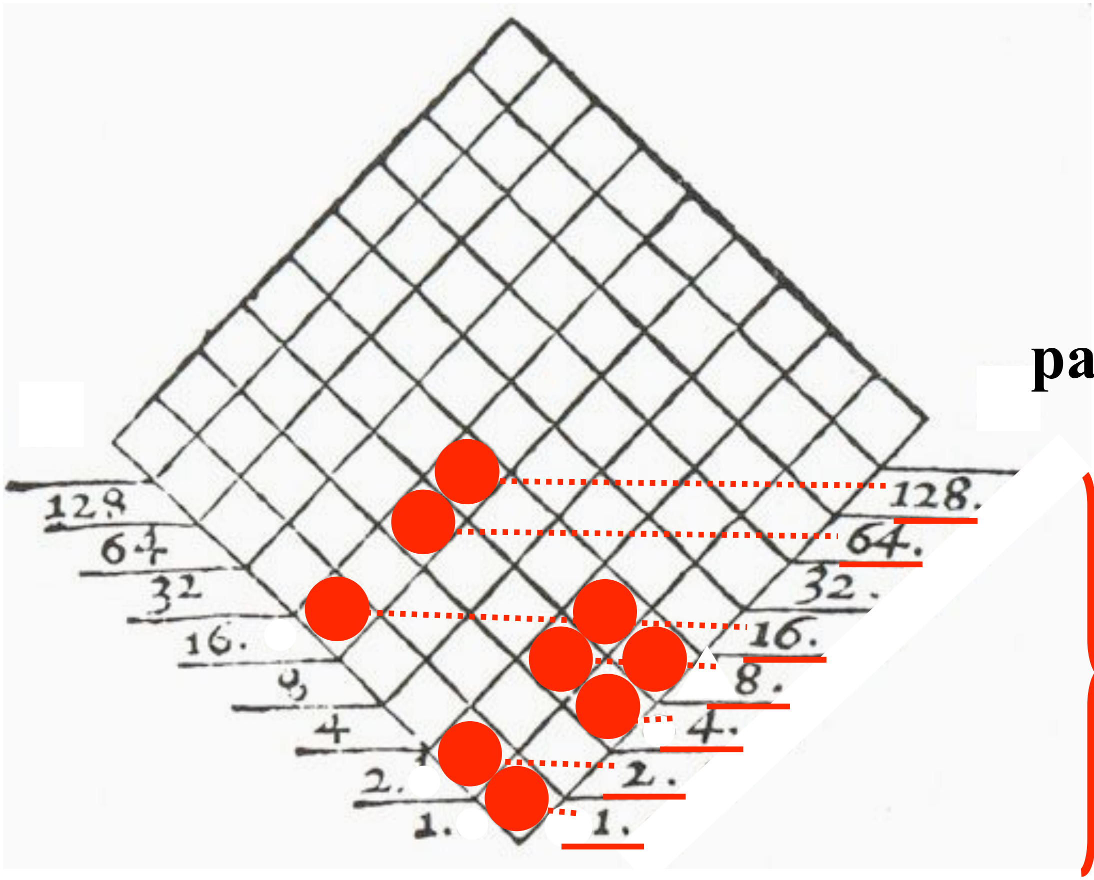


passo 2

19 = 16[$=2^4$] **+ 2**[$=2^1$] **+ 1**[$=2^0$]

13 = 8[$=2^3$] **+ 4**[$=2^2$] **+ 1**[$=2^0$]

(Algoritmo di conversione da decimale a binario, già noto agli scribi dell'antico Egitto)

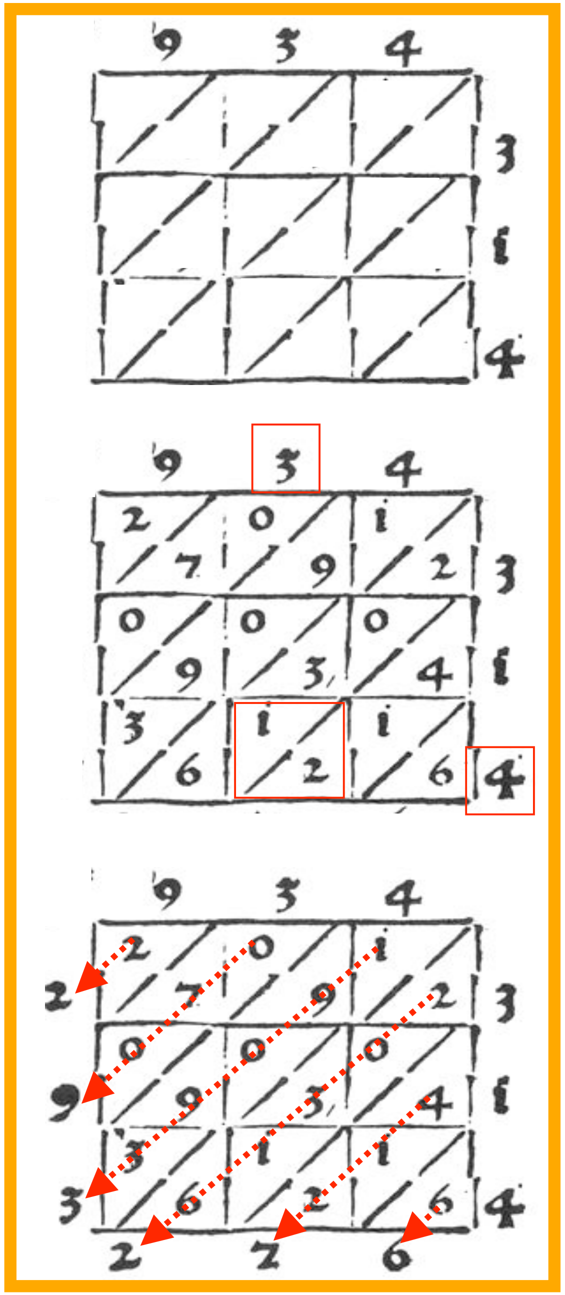


passo finale

128 +
64 +
16 + 16 +
8 + 8 +
4 +
2 +
1 =

247

Risultato: 19 × 13 = 247



Preludio ai "bastoncini di Nepero": algoritmo detto "gelosia", ovvero "a grata", per moltiplicare con carta e matita (*Aritmetica di Treviso*; 1478).

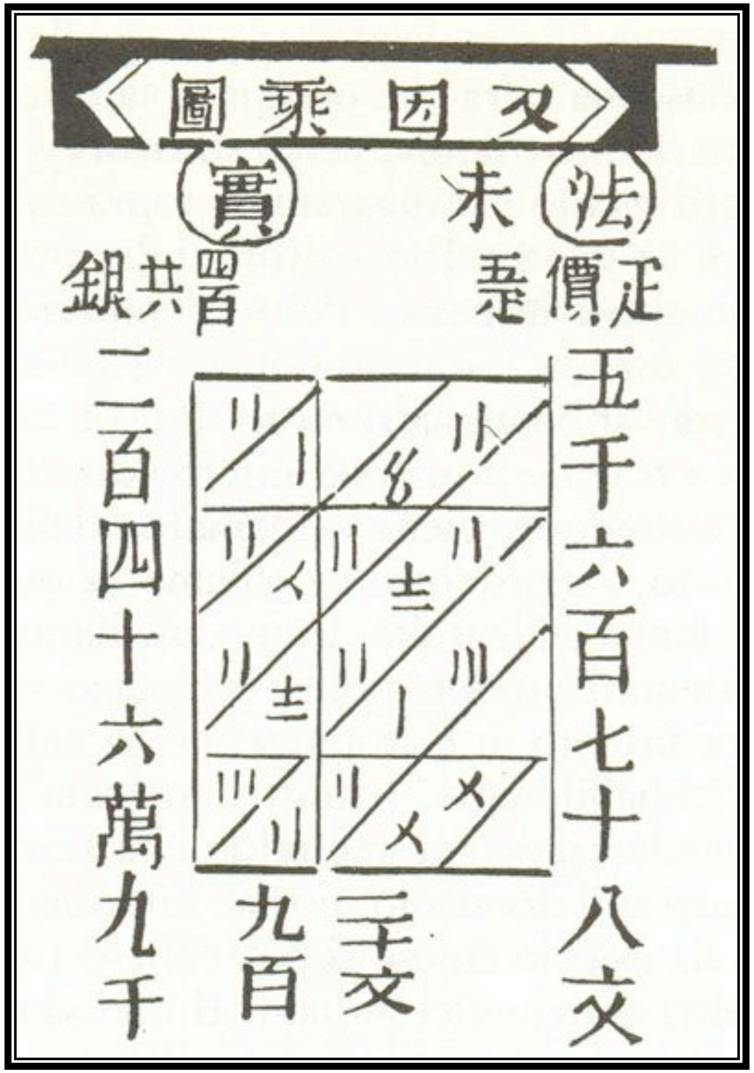
Esempio: 934 × 314 = ?

1 - Disegnare lo schema iniziale.

2 - Riempire le caselle, sapendo a memoria la tavola pitagorica (p.e. 3 × 4 = 12); scrivere le decine nel triangolo di sopra e le unità in quello di sotto.

3 - Fare le caratteristiche somme "in diagonale", cominciando dalle unità e sommando anche i riporti.

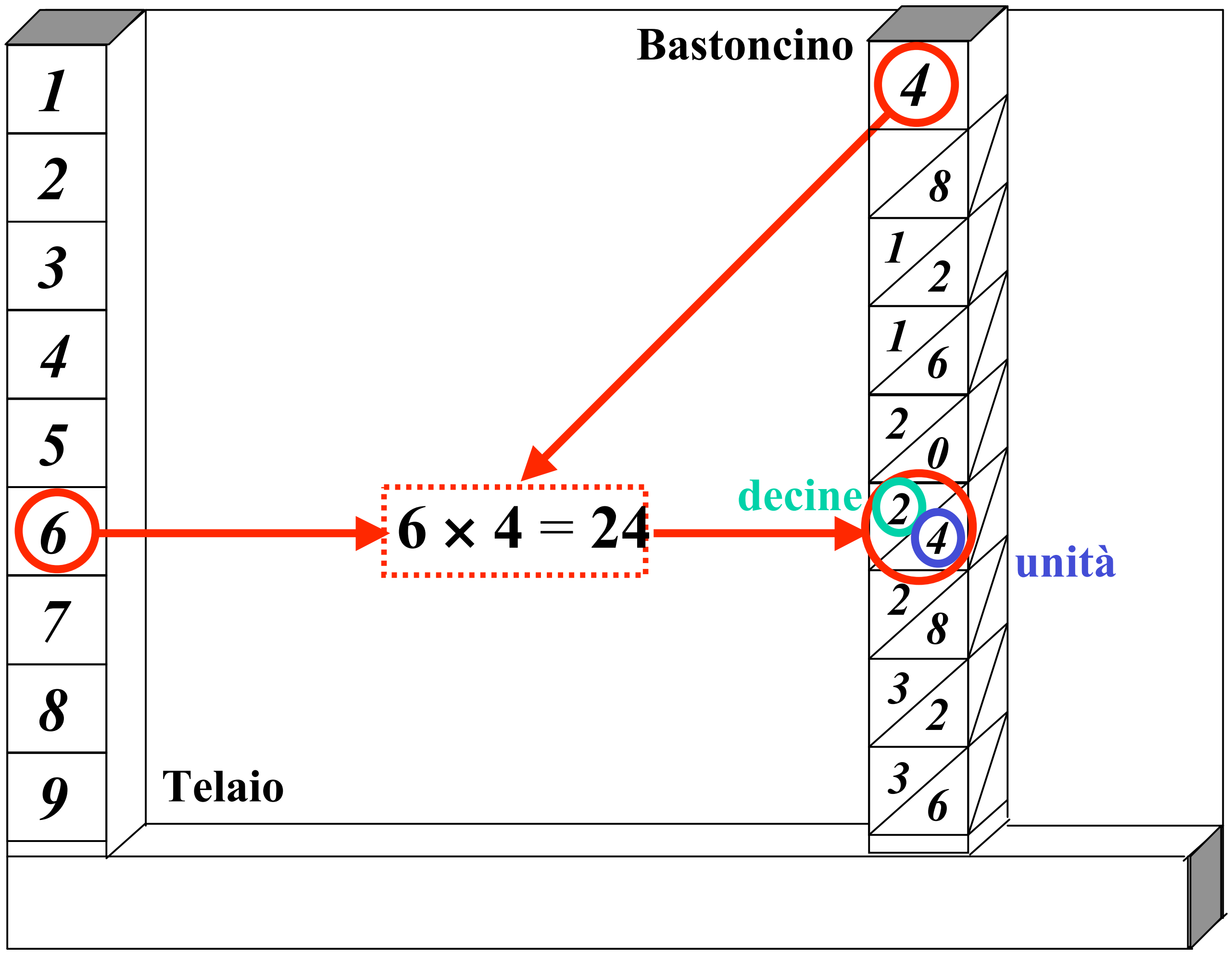
Risultato: 934 × 314 = 293276

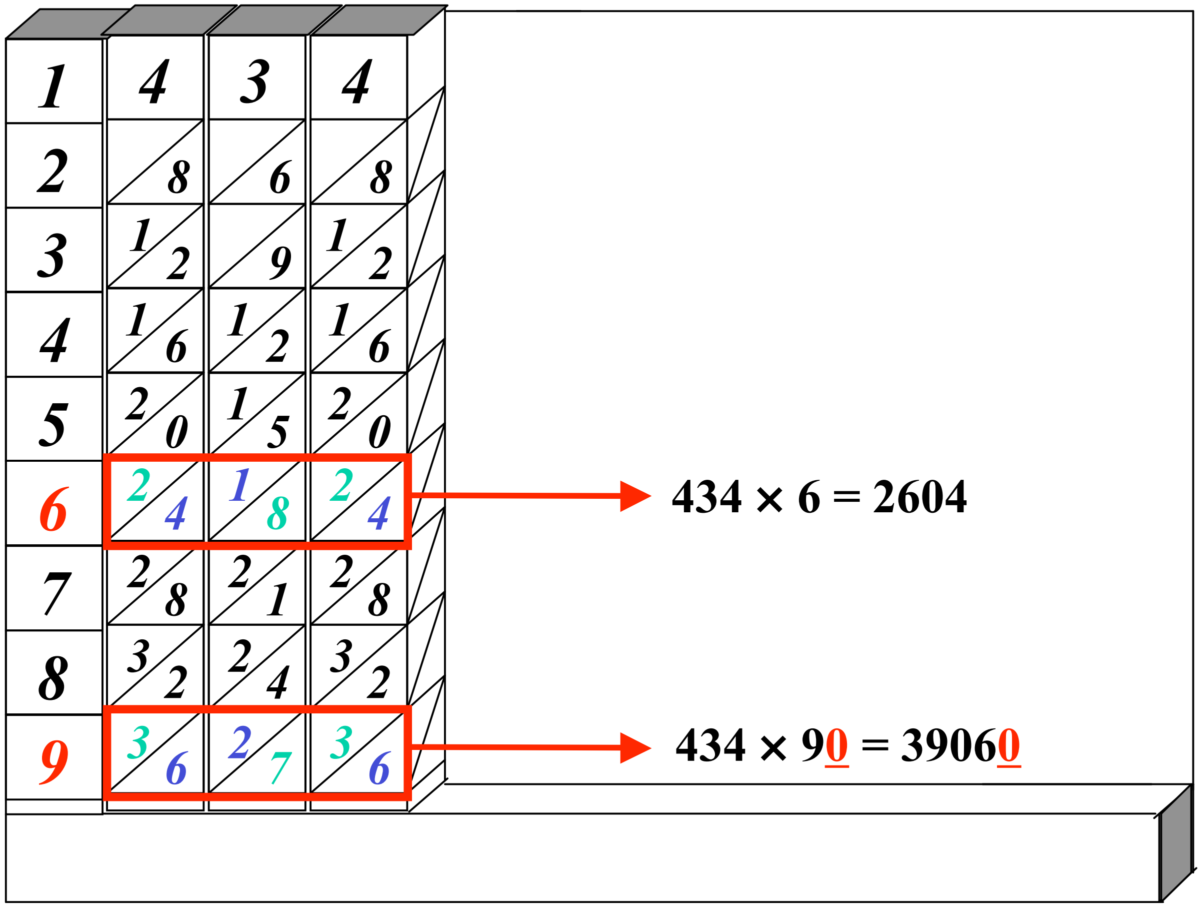


L'algoritmo "gelosia", di origine indiana o araba, è stato utilizzato anche in Cina.

(da un manuale cinese stampato nel 1593)

Rabdologia / 2: Bastoncini di Nepero





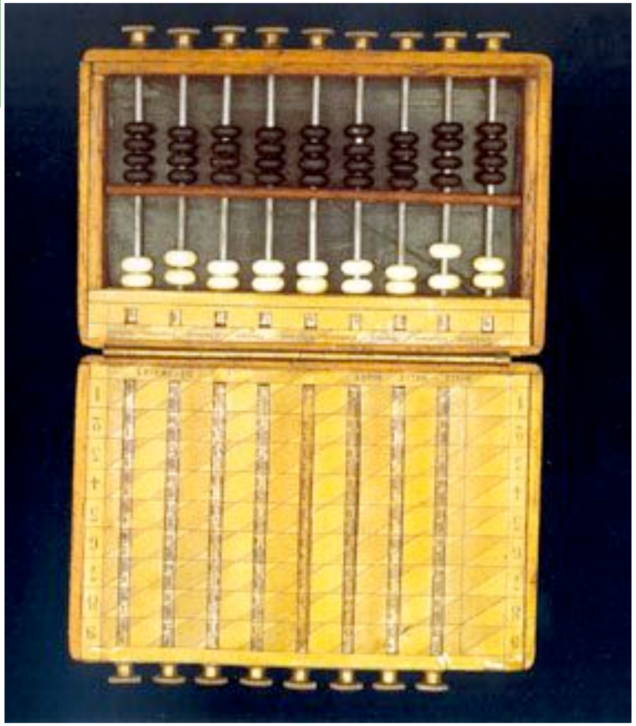
Esempio:

una moltiplicazione.

$$\begin{array}{r} 2604 \; + \\ 39060 \; = \\ \hline 434 \times 96 = \quad 41664 \end{array}$$

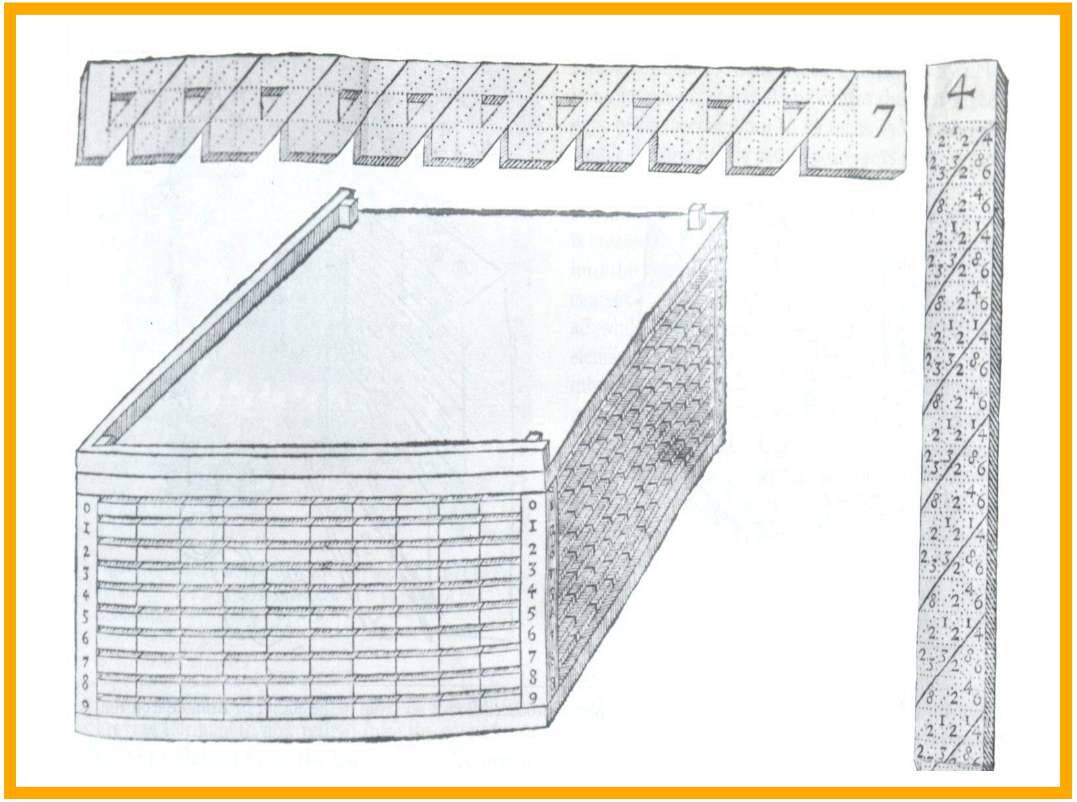
Set di bastoncini neperiani

Rulli di Gaspard Schott (1608-1666)



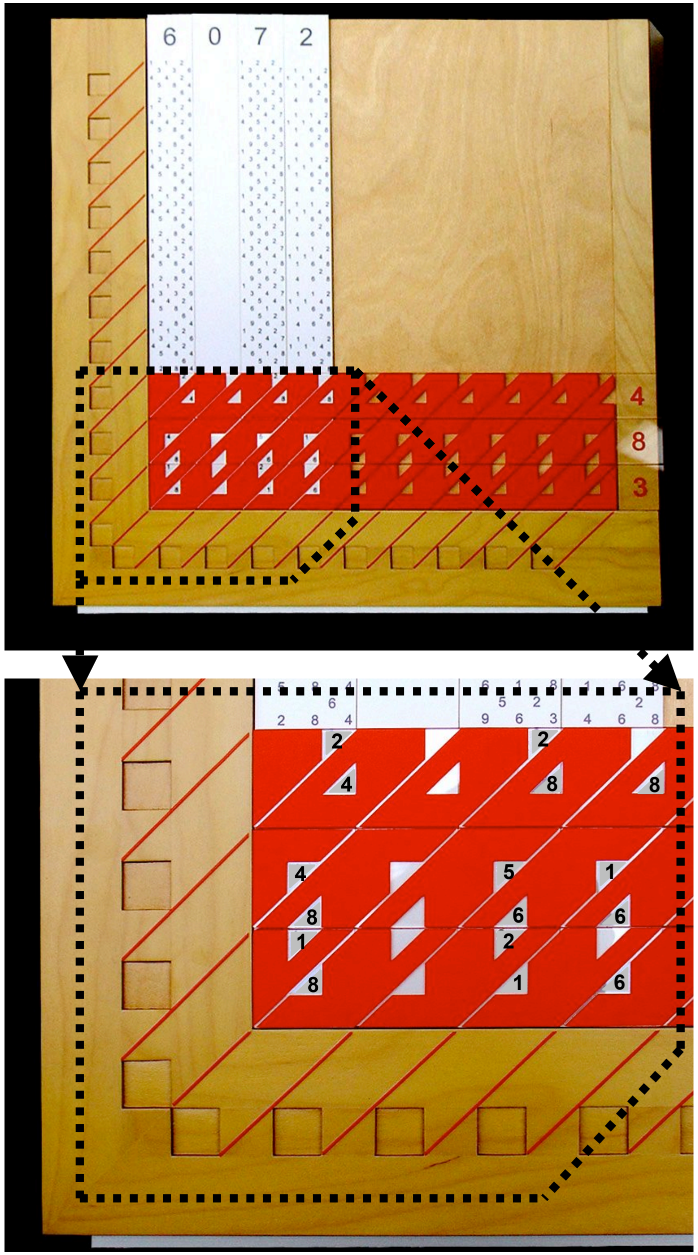
Rulli di Schott (moltiplicazione) abbinati con abaco (addizione)

Rabdologia / 3: *Promptuarium*



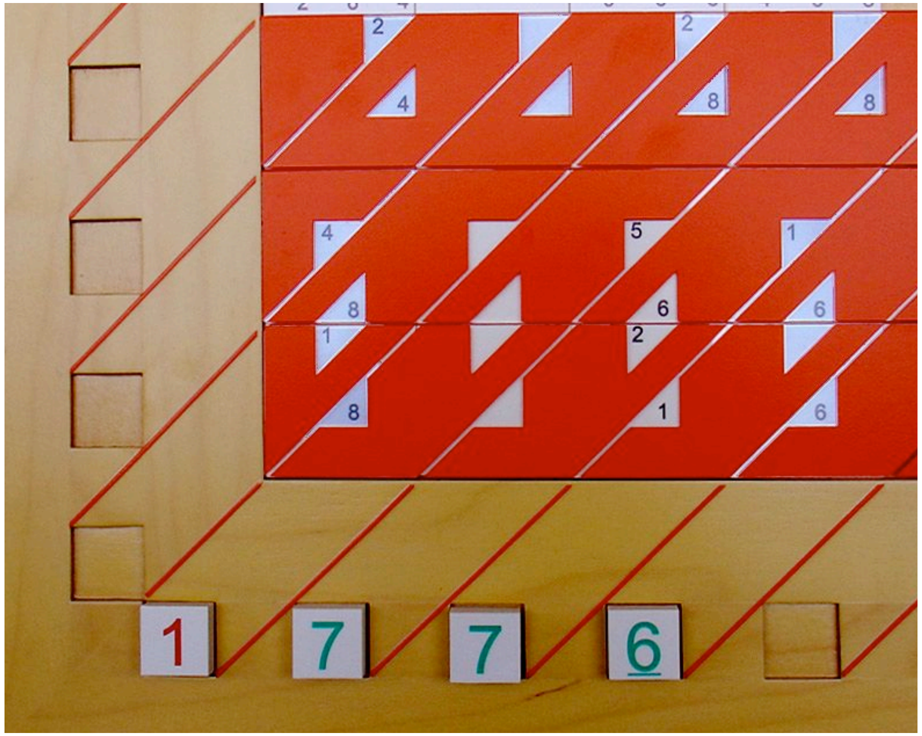
Disegno nella *Rabdologia*

Ricostruzione moderna

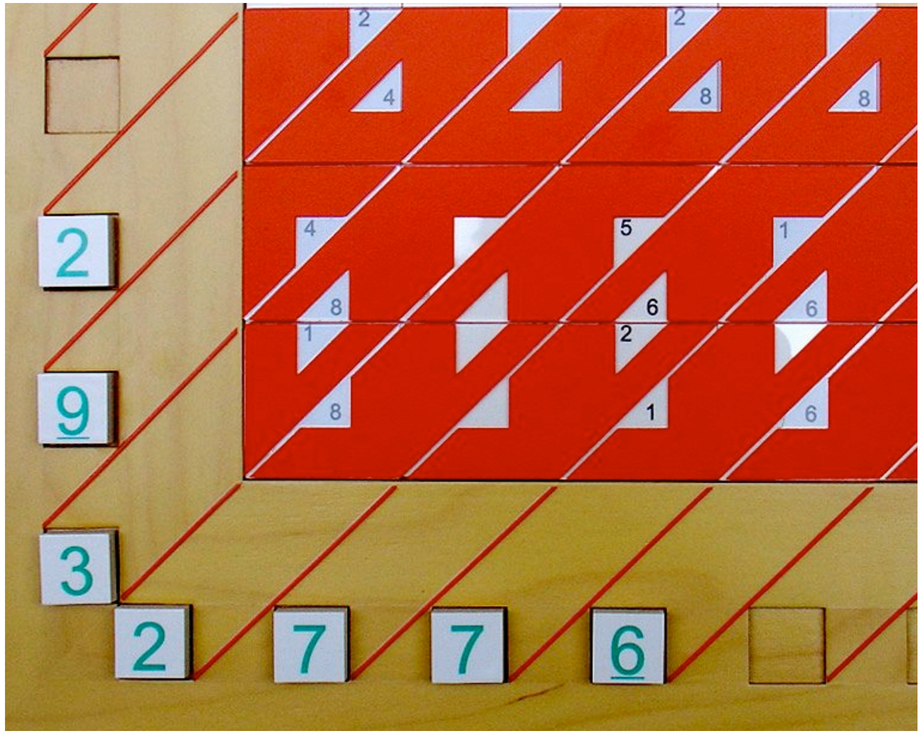


Esempio di moltiplicazione con il *Promptuarium*:

6072 × 483 = ?

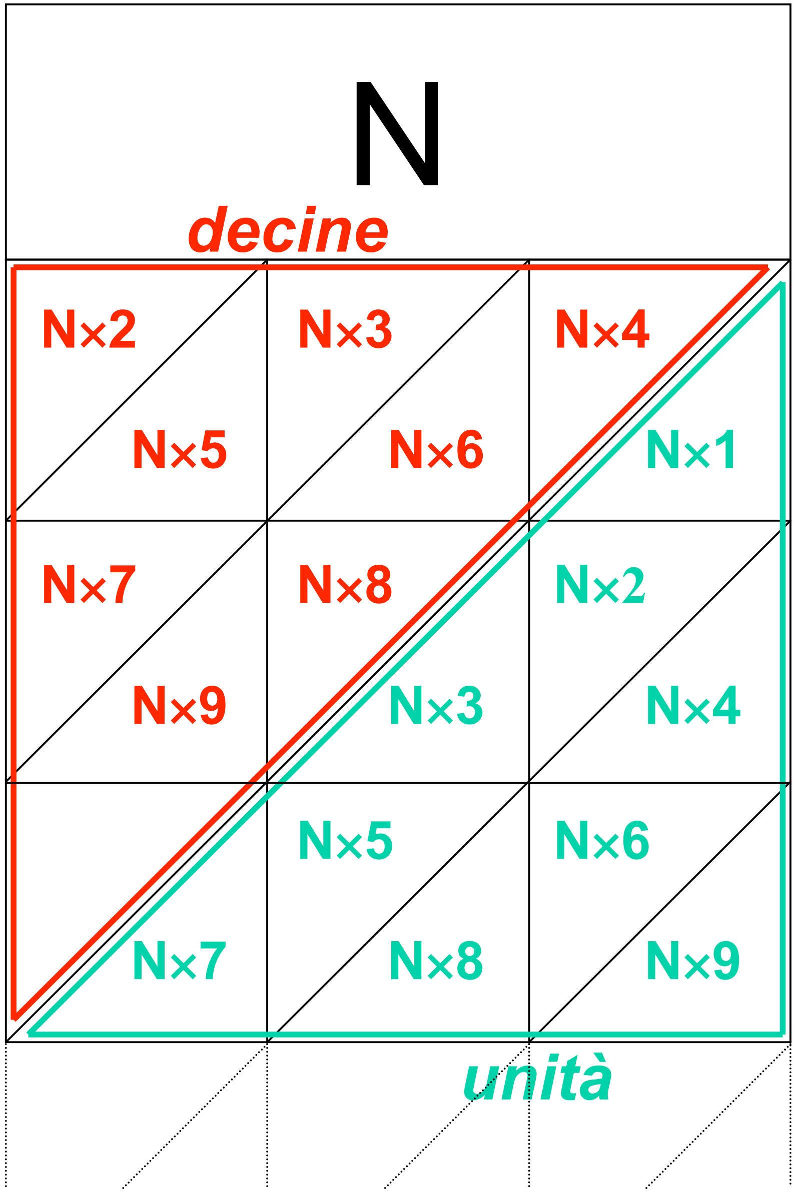


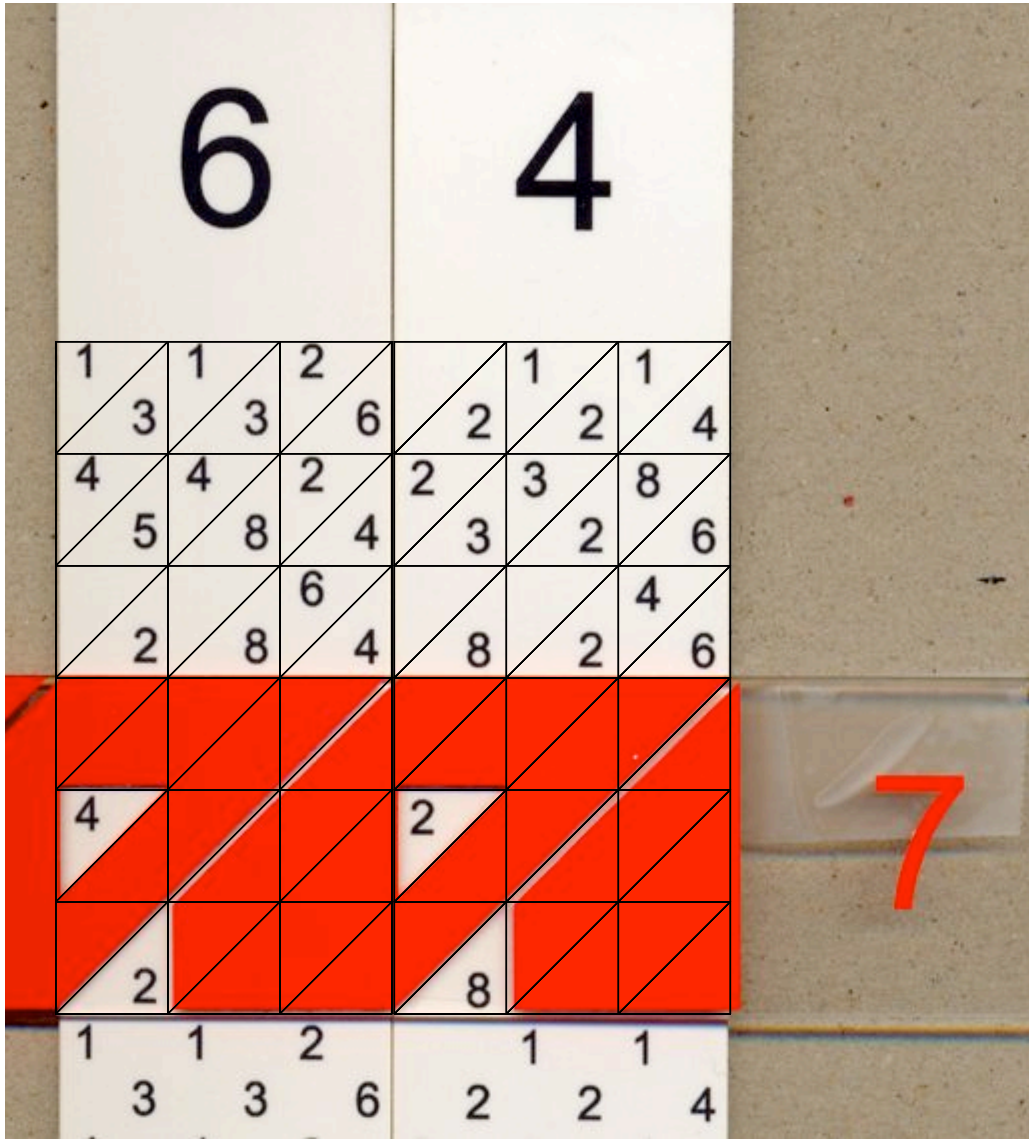
Una fase intermedia del calcolo.



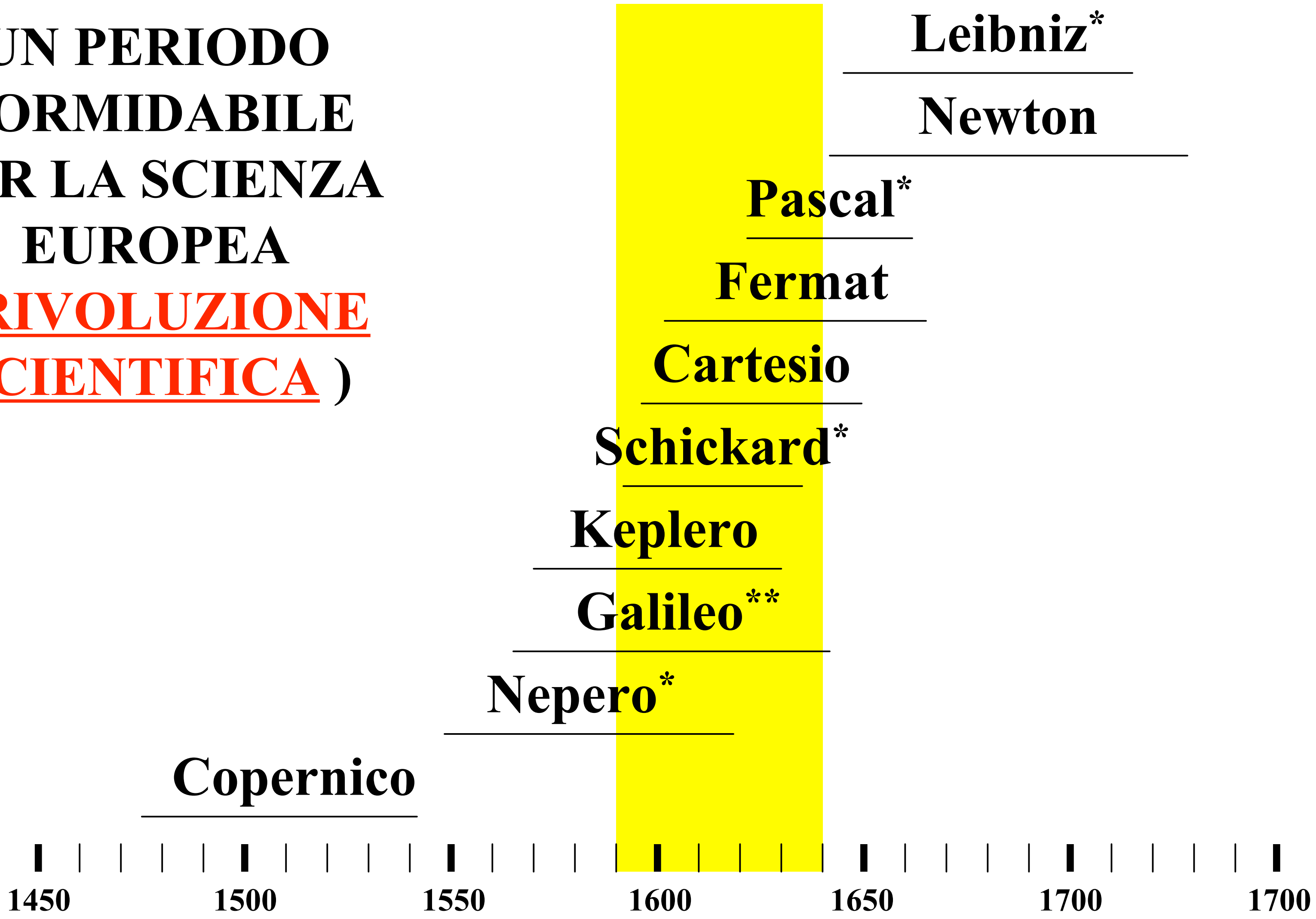
Risultato: 6072 × 483 = 2932776

Il segreto del *Promptuarium*

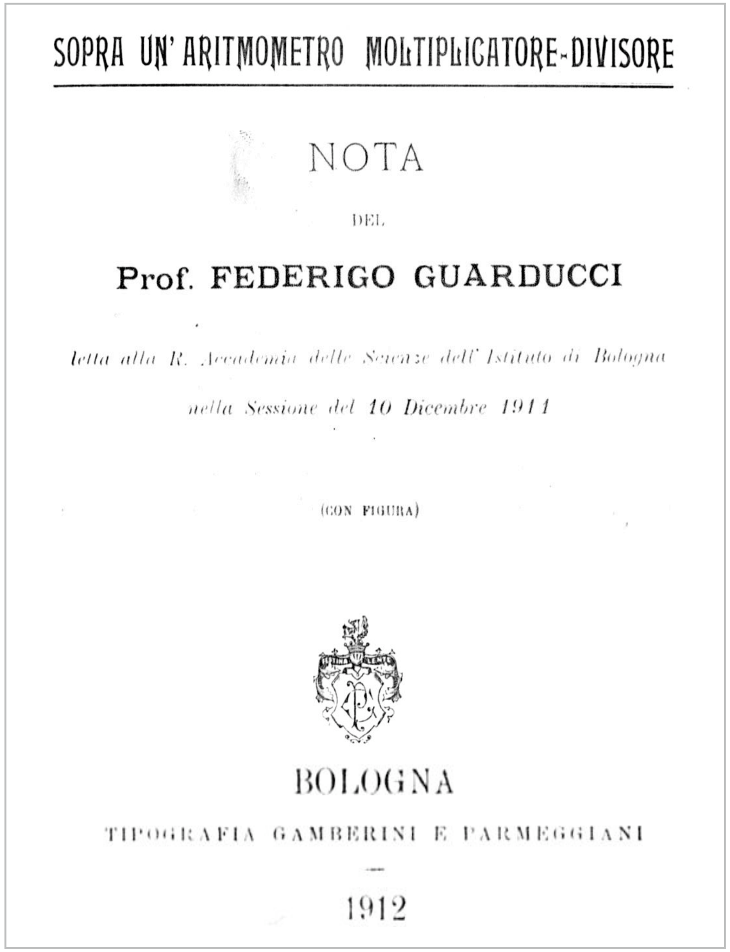




UN PERIODO FORMIDABILE PER LA SCIENZA EUROPEA (RIVOLUZIONE SCIENTIFICA)



* Inventori di strumenti per il calcolo numerico. ** Inventori di strumenti per il calcolo analogico.



SOPRA UN' ARITMOMETRO MOLTIPLICATORE-DIVISORE

NOTA

DEL

Prof. FEDERIGO GUARDUCCI

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna

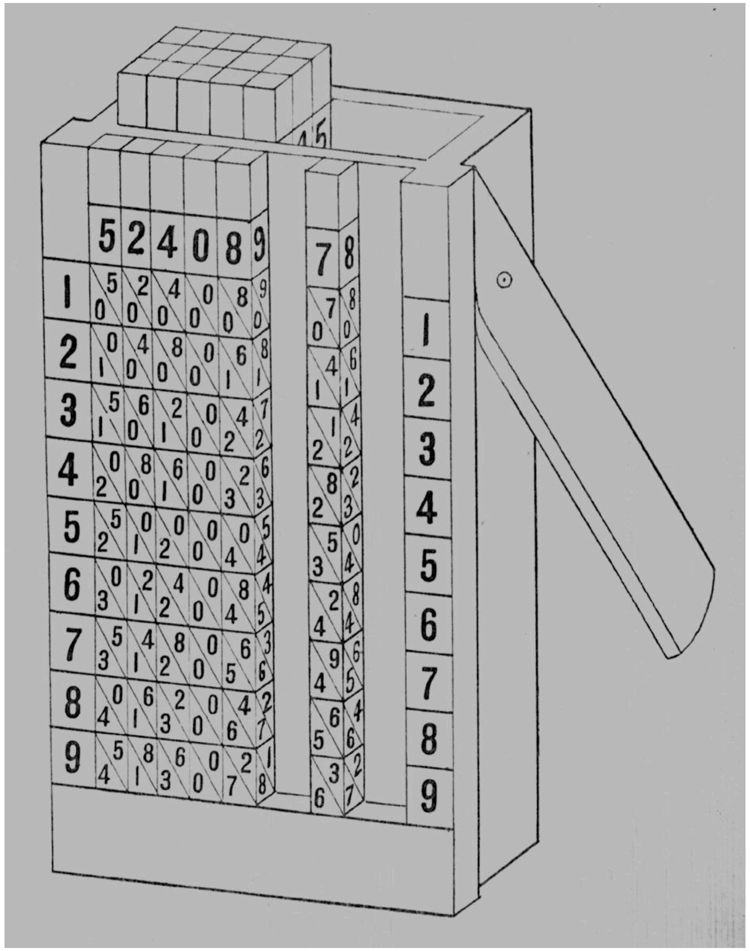
nella Sessione del 10 Dicembre 1911

(CON FIGURA)

BOLOGNA

TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI

1912



In epoca relativamente moderna (1912) i Bastoncini di Nepero venivano ancora proposti come «apparecchio portatile utile agli ingegneri, agli agronomi e, in generale, a tutti coloro che sono chiamati ad eseguire un gran numero di moltiplicazioni e divisioni»

VEDERE APPENDICE:

Regoli di Genaille (1885)

per moltiplicare e dividere